This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

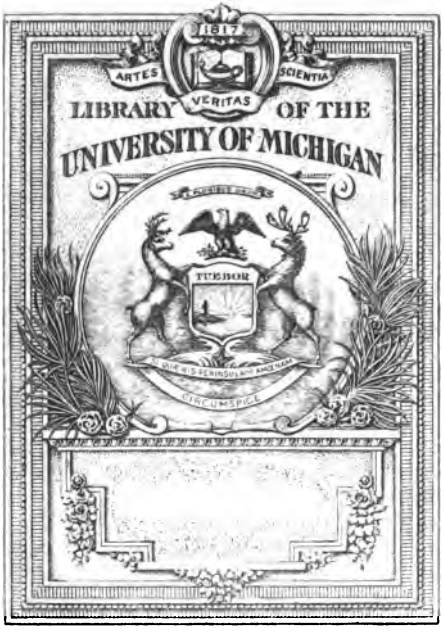
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

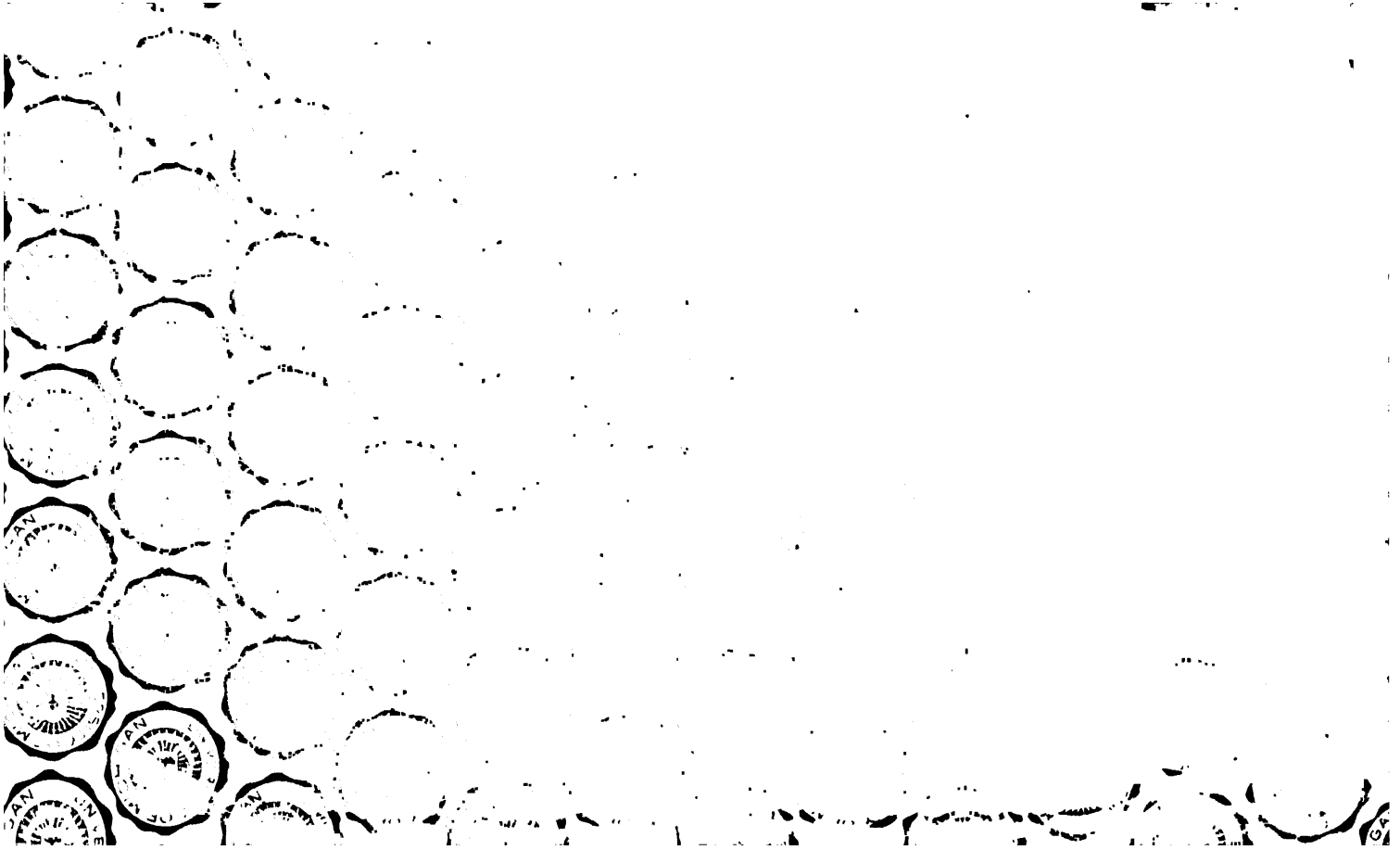
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

UNIVERSITY OF MICHIGAN





QA
37
.T26

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

S.H.M.

LEÇONS

ÉLÉMENTAIRES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME PARTIE.

Contenant un Supplément aux Élémens d'Algèbre, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, et les principes du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral;

Par P. TEDENAT,

Associé de l'Institut national de France, de la Société libre des Sciences et Belles-Lettres de Montpellier, Professeur de Mathématiques à l'Ecole centrale du Département de l'Aveyron.

TOME PREMIER.

A RODEZ, CHEZ L'AUTEUR;

Et à PARIS,

Chez DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN X — 1801.

QA
37
.T26

Leo. Com.
Mechelinia
2-14-28
16615
2v.

AVERTISSEMENT.

L'OUVRAGE que je présente aujourd'hui au public a déjà été annoncé à la suite de mes Leçons Elémentaires d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie, qui ont déjà paru, et dont celui-ci fait partie. J'ai cherché à le rendre le plus intéressant qu'il m'a été possible, par le grand nombre de vérités utiles que j'y ai rassemblées, et dont la plupart étoient encore éparses dans les collections académiques ou dans les ouvrages originaux des grands Géomètres qui les ont découvertes. Dans l'état actuel de l'analyse, j'ai pensé qu'un Traité Elémentaire de cette science, destiné à ceux qui veulent pénétrer un peu avant dans l'étude des Mathématiques, devoit renfermer toutes les théories nouvelles qui peuvent introduire dans leur esprit le germe des plus précieuses découvertes: ces théories se trouvent répandues dans les ouvrages d'Euler, de Dalembert, de Lagrange, de Laplace, de Cousin, de Legendre, de Bossut, de Lacroix... &c. dans les leçons de l'Ecole Normale, dans les cahiers de l'Ecole Polytechnique; c'est aussi dans les écrits de ces grands Géomètres que j'ai puisé, comme dans une source pure et abondante, la plus grande partie des vérités contenues dans ce vo-

lume : elles sont divisées naturellement en deux classes ; les unes regardent l'analyse des anciens, les autres ont pour objet l'analyse des modernes.

Dans la première partie, on trouvera réunies un grand nombre d'observations nécessaires sur la composition et décomposition des équations numériques en facteurs simples ou doubles réels, sur la nature et le signe des racines, sur la transformation d'une équation en une autre dont les racines ont tel rapport qu'on voudra avec la proposée : on y trouve encore la démonstration de Huddes sur les racines égales, de celle de Descartes sur le nombre des racines positives ou négatives, et plusieurs autres théorêmes sur les fonctions symétriques ou invariables, sur l'équation aux quarrés des différences, sur la possibilité de résoudre toute équation de degré pair en facteurs doubles réels.

La résolution générale des équations y est traitée avec ordre et précision. Après avoir fait connoître la méthode de Cardan pour les équations du troisième degré, et celle de Louis Ferrari pour les équations du quatrième, on a développé avec détail la méthode de Lagrange, déduite de la considération des fonctions des racines. Enfin cette partie de l'analyse est terminée par la résolution des équations par approximation, par l'exposé des différentes méthodes

connues d'élimination, et par quelques notions des nombres figurés et des séries récurrentes.

Vient ensuite la théorie des fonctions analytiques, devenue si intéressante par les travaux de Lagrange; elle nous a fourni le moyen de démontrer d'une manière générale et rigoureuse, le binome de Newton, et de compléter la théorie des logarithmes et des sinus qui n'étoient pour ainsi dire qu'ébauchés dans les deux premiers volumes.

L'application de l'Algèbre à la Géométrie comprend les propriétés de la ligne droite d'après son équation, et celles des courbes du premier ordre, déduites de l'équation générale de ce degré à deux indéterminées. Après avoir appris à construire l'équation générale du premier degré, j'analyse les différens cas de l'équation complète et indéterminée du second degré, et les différentes configurations de courbes qui en résultent, et qu'on peut regarder comme des modifications d'une même courbe représentée par l'équation générale : on examine ensuite les propriétés générales et particulières de ces courbes: on y donne la transformation des coordonnées que l'on applique à la recherche des diamètres conjugués et à celle des tangentes; l'on y trouvera les formules générales des sous-tangentes, des sous-normales, des rayons de courbure... &c. déduites des méthodes de Descartes, de Fer-

mat, de Lagrange ; enfin une démonstration synthétique de l'identité des courbes du premier ordre ou lignes du second ordre, avec les sections faites par un plan dans un cône. La théorie générale des sections coniques est suivie de la description de plusieurs autres courbes algébriques ou transcendantes, et de quelques observations sur les affections générales des courbes, et sur leur usage dans la résolution ou la construction des équations algébriques.

La seconde partie comprend les Elémens du Calcul des Différences finies et du Calcul Différentiel et Intégral ; les variations que ces nouveaux calculs ont éprouvées dans l'exposition des principes pouvoient être regardées comme un motif d'incertitude ou d'obscurité, et il étoit de la plus grande importance pour les progrès de l'analyse, de fixer les vrais élémens de la nouvelle doctrine : c'est ce que Lagrange a fait dans sa théorie des fonctions analytiques, que nous avons fait connoître dans la première partie. Mais il restoit encore à faire voir la conformité entre la théorie des fonctions analytiques, le calcul différentiel et la méthode des limites. J'ai donc exposé séparément les principes de ces différentes méthodes, je les ai comparées entr'elles, et les ai appliquées ensuite à la solution des mêmes problêmes.

En composant cet ouvrage, je n'ai eu d'autre

but que de préparer les élèves qui fréquentent les Ecoles Centrales, à étudier avec fruit, dans les livres originaux les théories dont je ne leur présente que l'analyse, et dans laquelle je n'ai souvent fait que rétablir les calculs intermédiaires nécessaires pour l'intelligence du texte. Ceux qui se préparent pour les examens de l'Ecole Polytechnique, trouveront dans ce volume, et dans les deux qui précèdent, toutes les théories énoncées dans le programme de cette Ecole, démontrées d'après les principes de Lagrange et de Laplace, conformément aux avis du Ministre de l'Intérieur, dans sa circulaire du 9 ventôse an 8. Cet ouvrage élémentaire et celui de Lacroix, sont les seuls que je sache rédigés d'après ces principes: on ne sera donc pas surpris qu'ils se ressemblent souvent par le choix des matières et par la manière dont elles sont traitées; j'avouerai même ici, avec reconnoissance, que les ouvrages de cet habile Géomètre m'ont été d'un grand secours: dépourvu de la plus grande partie des livres originaux, privé du conseil et des avis des personnes éclairées, je n'ai pu consulter que ses Leçons Elémentaires et son Calcul Différentiel et Intégral, ouvrage le plus complet en ce genre qui ait encore paru. J'ai été obligé de rappeler souvent d'anciennes idées ou de travailler sur des notes isolées et sans ordre. Quelque soin que j'aie mis

à la rédaction de cet ouvrage, je sens qu'il peut s'y être glissé quelques inadvertances indépendantes des fautes typographiques ; je réclame l'indulgence du lecteur, en faveur des vérités utiles que l'ouvrage renferme, et de l'avantage qu'il peut en retirer.

OBSERVATION.

Quelque soin qu'on donne à l'impression et à la correction des ouvrages de Mathématiques, il y reste toujours des fautes typographiques, sur-tout lorsqu'ils ne sont pas imprimés sous les yeux de l'Auteur. La plupart de celles qu'on trouvera dans cet *errata* sont très-faciles à appercevoir; il n'en est que deux ou trois qui auroient pu causer quelqu'embarras à l'élève qui verroit ces matières pour la première fois.

ERRATA.

Page 4, ligne 18, $-p$; *lisez* $-P$.
Page 13, ligne 16, s; *lisez* S.
Page 35, ligne 8, la millième série; *lisez* la m^ième série.
Page 53, ligne 19, l'auxiliaire; *lisez* auxiliaire.
Page 54, ligne 23, sous le radical $+4h'$; *lisez* $-4h'$.
Page 77, ligne 13, $+\frac{r}{4}$; *lisez* $-\frac{r}{4}$.
Page 80, ligne 2, $=\frac{5}{4}$; *lisez* $=\frac{S}{4}$.
Page *ibid.*, ligne 21, $s^2-45+8=0$; *lisez* $s^2-4.s+8=0$.
Page 96, ligne 5, et multipliant; *lisez* et multipliant entre eux les deux derniers facteurs.
Page 124, ligne 9, $+P'x\,Q'$; *lisez* $+P'x+Q'$.
Page *ibid.*, ligne 23, même correction.
Page 126, ligne 8, $=P^2=2\,Q$; *lisez* $=P^2-2\,Q$.
Page 128, ligne 14, $-\frac{p}{3}=k$; *lisez* $\frac{p}{3}=k$.
Page *ibid.*, ligne 24, $3kx+y^2$; *lisez* $3kxy^2$.
Page 153, ligne 7, *lisez* $n\left(\frac{2i'+n+3}{2}\right)-1$.
Page 141, ligne dernière, $\phi(r)^{-1}$; *lisez* $(\phi.r)^{-1}$. (correction essentielle).
Page 142, ligne 2, même correction.
Page 145, ligne 7, $+F'.x$; *lisez* $+kF'x$.
Page 147, ligne 10, multipliez le premier terme par $\frac{R}{A}$.

Page 151, ces trois lignes de calcul doivent être lues comme il suit :

$$\sqrt{\frac{p}{2a}} \times \overline{a \pm x \pm k}\,[2ax \pm x^2 + \overline{2a \pm 2x}.k]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{2a}} \times \overline{a \pm x \pm k}\,(2ax \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{(a \pm x)k}{(2ax \pm x^2)^{\frac{1}{2}}} :$$

Le coefficient de k dans le développement de cette fonction est

$$\sqrt{\frac{p}{2a}} \times (2ax \pm x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{a \pm x}{(2ax \pm x^2)^{-\frac{1}{2}}}.$$

Page 153, lignes 23 et 24 ; *lisez* comme il suit : (essentielle.)

$$F'(X, Z) = p\,Z\,(X, Z)^{p-1},$$
$$F_1(X, Z) = p\,X\,(X, Z)^{p-1}.$$

Page 155, lignes 12 et 13 ; *lisez* comme il suit : (essentielle.)

$$F'(x, y) = 2ax + by + d,$$
$$F_1(x, y) = 2cy + bx + f.$$

Page 161, ligne 12, ces deux sortes; *lisez* ces sortes.
Page 183, ligne 5, $m + o$; *lisez* $m = o$.
Page 186, ligne 11, a; *lisez* A.
Page 202, ligne première, $B b^{n-1} x^{n-1}$; *lisez* $B \beta^{n-1} x^{n-1}$.
Page 227, ligne 15, l'équation; *lisez* la forme de l'équation.
Page 224, ligne 13, $z = -\sqrt{\ldots}$ *lisez* $z = +\sqrt{\ldots}$

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIEME PARTIE.

Notions générales sur la nature des équations.

1. En examinant attentivement la raison pour laquelle les équations du second degré sont susceptibles de deux racines désignées par a et b, on a vu (*Alg.* 91) que c'est parce qu'elles sont le produit de deux facteurs $x-a$, et $x-b$; et qu'ainsi l'équation générale du second degré peut être mise sous la forme $(x-a)(x-b)=0$: cette manière d'envisager les équations du second degré, étendue aux équations d'un degré quelconque, est la base de la théorie générale des équations : il importe donc de la développer, pour en voir sortir les principaux résultats de cette branche importante de l'analyse.

2. Soit un nombre donné de facteurs $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, &c. le produit de $x-a$ par $x-b$, et par $x-c$ est

$$\left.\begin{matrix} x^3 - a \\ -b \\ -c \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 + ab \\ +ac \\ +bc \end{matrix}\right\} x - abc :$$

Le produit de $x-a$ par $x-b, x-c, x-d$, est

$$\left.\begin{matrix} x^4 \\ -a \\ -b \\ -c \\ -d \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^3 \\ +ab \\ +ac \\ +ad \\ +bc \\ +bd \\ +cd \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x^2 \\ +-abc \\ -abd \\ -acd \\ -bcd \end{matrix}\right\} x + abcd:$$

Il est aisé de remarquer dans les multiplications précédentes, 1°. que le premier terme de ces produits est x élevée à une puissance marquée par le nombre des facteurs; 2°. que le second terme est x élevée à une puissance d'un degré moindre d'une unité avec un coefficient égal à la somme des lettres a, b, c, d; 3°. que le troisième terme est x élevée à une puissance d'un degré moindre d'une unité que dans le second, avec un coefficient égal à la somme des produits des mêmes lettres prises deux à deux; 4°. que le quatrième terme est x élevée à une puissance moindre d'une unité que dans le terme précédent, avec un coefficient égal à la somme des produits des mêmes lettres prises trois à trois; 5°. que le dernier terme est le produit des quatre lettres $abcd$.

D'où l'on peut conclure, que si dans la multiplication précédente on fait $x = a$, ou $x = b$, ou $x = c$, ou $x = d$, chacune de ces valeurs rendra le produit $= 0$, et par conséquent il y aura quatre manières différentes de satisfaire à l'équation

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = 0;$$

ou, ce qui signifie la même chose, cette équation a quatre racines représentées par les lettres $a; b, c, d$.

3. Si l'on fait la somme des quatre racines $= p$, la somme des produits des mêmes racines prises deux à deux $= q$, la somme des produits des mêmes racines prises trois à trois $= r$, et le pro-

duit de toutes les quatre racines $= s$, l'équation deviendra $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$.

4. Si l'on multiplie cette équation du quatrième degré par $x - f$, on aura l'équation du cinquième degré

$$\left.\begin{matrix} x^5 \\ -f \end{matrix}\right\} - p \left.\begin{matrix} x^4 \\ +fp \end{matrix}\right\} + q \left.\begin{matrix} x^3 \\ -fq \end{matrix}\right\} - r \left.\begin{matrix} x^2 \\ +fr \end{matrix}\right\} + s \Big\} x - fs = 0 :$$

Où l'on voit, 1°. que si p est la somme des quatre premières racines, $p + f$ est celle des cinq racines de l'équation du cinquième degré, ce qui est évident; 2°. Si q est la somme des produits des quatre premières racines prises deux à deux, $q + fp$ est celle des mêmes produits des cinq racines: en effet, on a $p = a + b + c + d$, donc $fp = af + bf + cf + df$; d'ailleurs $q = ab + ac + ad + bc + bd + cd \ldots$ donc $q + fp$ est la somme de tous les produits qu'on peut faire avec les cinq racines, en les multipliant deux à deux: 3°. si r est la somme des produits des quatre premières racines prises trois à trois, on trouvera par un calcul analogue au précédent, que $r + fq$ exprime les mêmes produits formés avec les cinq racines; 4°. enfin si s est le produit des quatre premières racines, fs sera évidemment le produit des cinq.

5. Sans pousser plus loin ce calcul, on doit voir que le produit d'un nombre n de facteurs tels que $x - a$, $x - b$, $x - c \ldots$ aura la forme suivante:

$$x^n - Px^{n-1} + Qx^{n-2} - Rx^{n-3} + Sx^{n-4} - \ldots \pm V;$$

et que si un de ces facteurs, n'importe lequel, est zéro, le produit de tout sera zéro; c'est-à-dire que l'on aura l'équation

$$x^n - Px^{n-1} + Qx^{n-2} - Rx^{n-3} + Sx^{n-4} - \ldots \pm V = 0 :$$

Dans cette équation, $P =$ la somme des racines

de l'équation ; $Q =$ la somme des produits des mêmes racines prises deux à deux ; $R =$ la somme des produits des mêmes racines prises trois à trois... et $V =$ le produit de toutes les racines.

6. On voit aussi que lorsque toutes les racines sont positives, les termes de l'équation ont alternativement le signe + et le signe — ; lorsqu'elles sont toutes négatives, les termes de l'équation ont tous le signe +. Si les racines de l'équation sont les unes positives et les autres négatives, on ne pourra rien conclure généralement pour le signe des termes.

7. Si parmi le nombre n de facteurs, il s'en trouve plusieurs égaux, c'est-à-dire si l'on a $a = b = c = \ldots$ etc. l'équation a plusieurs racines égales, ou ce qui revient au même, la même racine est plusieurs fois facteur dans le produit..... $x^n - p x^{n-1} + Q x^{n-2} \ldots \pm V = 0$.

Les observations précédentes sur la forme et la valeur des coefficiens d'une équation d'un degré quelconque ont été faites par Descartes, ainsi que plusieurs autres sur la formation des équations, sur la nature et les signes des racines, sur la transformation d'une équation en une autre dont les racines aient tel rapport qu'on voudra avec les racines de la proposée : elles sont de la plus grande utilité pour étendre et perfectionner la théorie des équations. Nous ne tarderons pas à les faire connoître.

Ce qu'on vient de lire dans l'article précédent fait connoître la forme de l'équation du degré n, résultante de la multiplication du nombre n de facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c \ldots$ Mais réciproquement toute expression algébrique du degré n peut-elle toujours se décomposer en facteurs de la forme $x - a$, $x - b \ldots$ ou, ce qui est la

même chose, existe-t-il toujours une valeur a, qui, substituée à la place de x dans une expression algébrique donnée, rende la somme de tous ces termes égale à zéro ? c'est ce que nous examinerons dans les articles suivans. Nous supposerons d'abord que l'équation a toutes ses racines réelles, nous nous occuperons ensuite de celles qu'on nomme imaginaires.

DÉFINITIONS.

8. On nomme fonction d'une ou plusieurs grandeurs, toute expression algébrique de forme quelconque, qui renferme des quantités variables et des quantités constantes : ainsi $a + bx$ est une fonction de x.... $(z + ay + bx)^m$ est une fonction des variables x, y, z.

Toute quantité dont la valeur dépend de plusieurs autres quantités est dite fonction de ces quantités, soit qu'on connoisse ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de la valeur de celle-ci à la valeur de la première : c'est dans ce sens que les racines d'une équation sont fonctions des coefficiens des différens termes de l'équation, c'est-à-dire dépendent de la valeur de ces coefficiens.

Les fonctions sont rationnelles lorsqu'elles ne renferment pas des grandeurs sous le signe radical, et elles sont entières lorsqu'elles ne contiennent pas de fractions.

Les fonctions sont dites homogènes lorsque la somme des dimensions des grandeurs variables dont elles sont composées est la même dans tous les termes : ainsi $x^2y + ax^3 + by^3$ est une fonction homogène de x et y.

La fonction est linéaire, lorsque les grandeurs

dont elle est composée ne sont élevées qu'à la première puissance et ne sont pas multipliées entr'elles, telle est la fonction $ax+by$.

Les fonctions semblables sont celles dans lesquelles les variables et les constantes entrent de la même manière. Telles sont les deux suivantes...

$$x^2+axy+by^2, \quad X^2+aXY+bY^2.$$

On nomme fonction invariable ou symétrique toute expression des grandeurs $a, b, c....$ etc. combinées entr'elles d'une manière semblable, en sorte qu'elles restent les mêmes en y changeant les quantités entr'elles : par exemple, les quantités $a+b+c...ab+ac+bc...abc...a^2+b^2+c^2...$, $a^3+b^3+c^3...$ sont des fonctions symétriques ou invariables des trois quantités a, b, c, parce qu'elles restent les mêmes en y changeant a en c, et c en a ; ou a en b, et b en a ; ou encore b en c, et c en b.

Ainsi la somme des racines d'une équation, celle de leurs produits deux à deux, celle des produits trois à trois... etc. sont des fonctions symétriques ou invariables de ces mêmes racines. La somme des quarrés, celle des cubes des mêmes racines, et en général la somme des puissances quelconques des racines d'une équation, sont des fonctions symétriques de ces racines.

La forme des fonctions peut être indéterminée ou inconnue, et pour lors on emploie un signe abstrait pour la désigner, tel que f ou F, ou φ. Ainsi $fx...F(x,y)...\varphi(x,y,z)$ représentent une combinaison quelconque connue ou inconnue des variables $x, y, z...$ avec d'autres quantités qu'on regarde comme constantes.

Revenons à la théorie générale des équations, et commençons par démontrer les principaux théo-

rêmes qui servent de base et de fondement à toute cette théorie.

9. *Si l'on a une fonction algébrique ou un polynome quelconque d'un degré* n, *composé de termes positifs et négatifs, tels que*

$$x^n \pm P x^{n-1} \pm Q x^{n-2} \pm R x^{n-3} \pm S x^{n-4} \ldots \pm V,$$

et que l'on trouve deux nombres α, β, *tels qu'étant substitués successivement à la place de l'inconnue* x, *le polynome reçoive deux valeurs de signes contraires, il existera au moins une valeur entre* α *et* β *qui, substituée à la place de* x *dans le polynome, rendra la somme de tous les termes nulle, ou égale à zéro.*

Désignons en général par $F.x$ la somme de tous les termes du polynome qui ont le signe +, et par $f.x$ la somme de tous les termes qui ont le signe —, en sorte que le polynome soit $F.x - f.x$: supposons, pour plus de facilité, que les deux nombres qui, mis à la place de x dans le polynome, donnent deux résultats de signes contraires soient tous les deux positifs; représentons le plus petit par α, et le plus grand par β; si la substitution de α à la place de x donne pour $F.\alpha - f.\alpha$ un résultat négatif, et que la substitution de β à la place de x donne pour $F.\beta - f.\beta$ un résultat positif, il est visible que dans le premier cas on a $F.\alpha < f.\alpha$, et que dans le second on a $F.\beta > f.\beta$: or, par la forme des fonctions désignées par F, f, qui ne contiennent que des termes positifs et des puissances entières et positives de x, il est clair que ces quantités augmentent continuellement à mesure que x augmente, et qu'en faisant augmenter x par tous les degrés insensibles depuis α jusqu'à β, elles augmenteront aussi par degrés insensibles, mais de manière que $F.x$ augmentera plus rapidement que $f.x$, puisque

de plus petite qu'elle étoit, elle deviendra plus grande : donc en vertu de la loi de continuité, il y aura nécessairement un terme entre les deux valeurs α et β, où $F.x$ sera égal à $f.x$, comme deux mobiles qu'on suppose parcourir une même droite ou deux droites parallèles, et qui partant à-la-fois de deux points différens, arrivent au même instant à deux autres points, mais de manière que celui qui étoit en arrière se trouve ensuite plus avancé que l'autre. Ces deux mobiles, dis-je, doivent nécessairement se rencontrer dans leur chemin : donc en supposant que δ soit la valeur correspondante de x, commensurable ou incommensurable, on aura à ce point $F.\delta - f.\delta = 0$: ce qu'il falloit démontrer.

Si le polynome n'avoit pas de termes négatifs, on prendroit pour x des valeurs négatives $-\alpha - \beta$, les termes affectés des puissances impaires deviendroient négatifs, et le polynome prendroit la forme $F.\alpha - f.\alpha \ldots F.\beta - f.\beta$.

Si le polynome n'avoit pas de puissances impaires, et que tous les termes affectés de puissances paires fussent positifs, il seroit impossible de trouver pour x deux nombres tels que le polynome reçût deux valeurs de signes contraires.

10. *Si l'on a une équation d'un degré quelconque*

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} \ldots + V = 0,$$

et qu'on représente par $\pm a$ *la quantité qui, mise à la place de* x *dans l'équation rend le premier membre égal à zéro, cette équation sera divisible par* $x \pm a$.

Car il est évident, 1°. que x ne montant qu'au premier degré dans le diviseur, si on divise l'équation donnée par $x \pm a$, en poussant la division

jusqu'à son dernier terme, on aura un quotient Q, et un reste que j'appelle R, dans lequel x ne se trouvera pas. Le quotient sera donc $Q+\frac{R}{x\pm a}$; mais dans toute division, le quotient multiplié par le diviseur reproduit le dividende : donc..... $\left(Q+\frac{R}{x\pm a}\right)x\pm a$, c'est-à-dire $Q(x\pm a)+R$, doit être égal et identique avec le dividende. Or, en faisant $x=\pm a$ dans le dividende, tout s'évanouit par la supposition ; donc tout doit s'évanouir aussi par la même hypothèse dans l'expression $Q(x\pm a)+R$: on aura donc nécessairement $R=0$; ce qui annonce que la division se fait sans reste, et que par conséquent l'équation proposée est divisible par $x\pm a$.

Supposons actuellement que $\pm b$ substitué à la place de x dans le quotient Q fasse évanouir tous les termes, ce quotient sera divisible par $x\pm b$, et par conséquent *l'équation proposée sera divisible par* $x\pm b$: car nous venons de voir que l'équation proposée $=Q(x\pm a)$; or $Q=K(x\pm b)$, puisqu'il est divisible par $x\pm b$, donc la proposée sera divisible par $(x\pm a)(x\pm b)$... On trouvera de même qu'en supposant une quantité c qui, substituée à la place de x, fasse évanouir le quotient K, ce nouveau quotient, et par conséquent l'équation proposée sera divisible par $x\pm c$: on fera le même raisonnement sur les autres quotiens, jusqu'à ce qu'on en trouve un qui ne soit lui-même qu'un facteur binome ; donc l'équation proposée pourra se mettre sous la forme suivante :

$$(x\pm a)(x\pm b)(x\pm c)(x\pm d)(x\pm f)...=0.$$

A cette démonstration, qui est de d'Alembert,

nous ajouterons la suivante, tirée de Lagrange. Reprenons l'équation générale

$$x^n + P x^{n-1} + Q x^{n-2} + R x^{n3} \ldots + V = 0.$$

Si a est une racine de l'équation, on a l'équation particulière

$$a^n + P a^{n-1} + Q a^{n-2} + R a^{n-3} + \ldots + V = 0,$$

retranchant cette dernière de la première, ou ce qui revient au même, substituant dans la première la valeur de V prise dans la seconde, on a

$$x^n - a^n + P(x^{n-1} - a^{n-1}) + Q(x^{n-2} - a^{n-2}) + R(x^{n-3} - a^{n-3}) \ldots + T(x - a) = 0.$$

Tant que n est un nombre entier positif, $x^n - a^n$ est généralement divisible par $x - a$ (1): donc tous les termes de cette équation sont divisibles par $x - a$.

11. *Si le nombre des quantités réelles et inégales qui, mises à la place de* x *dans l'équation, peuvent rendre le premier membre égal à zéro, est plus petit que* n, *le facteur restant sera tel qu'il ne pourra jamais devenir négatif, quelque valeur qu'on donne à l'inconnue.*

Car supposons que le nombre des racines réelles et inégales de l'équation soit m moindre que n, l'équation pourra se mettre sous la forme suivante:

---

(1) On suppose ordinairement, ou l'on ne démontre que par induction, que $x^n - a^n$ est divisible par $x - a$: on peut cependant le démontrer de la manière suivante: mettons x sous cette forme $z + a$, et soit fait $x - a = z$, on aura $x^n - a^n = (z + a)^n - a^n$; en développant le binome, tous ses termes seront divisibles par z, excepté le dernier $+ a^n$ qui sera détruit par $- a^n$, mais $z = x - a$; donc tous les termes de $(z + a)^n - a^n$ seront divisibles par $x - a$, donc $x^n - a^n$ est divisible par $x - a$.

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(\ldots.)\times (x^{n-m}+px^{n-m-1}+qx^{n-m-2}+rx^{n-m-3}+\ldots+u)=0.$

Par l'hypothèse, il n'existe pas de valeur réelle qui puisse rendre zéro le facteur polynome ; donc quelque valeur qu'on donne à x, ce polynome ne pourra jamais avoir une valeur négative : car le premier terme de ce polynome est nécessairement positif, et si on donne à x une valeur plus grande que toute quantité assignable, ce premier terme surpassera la somme de tous les autres ; donc le polynome aura une valeur positive : s'il existoit un nombre qui, mis à la place de x rendît la valeur du polynome négative, entre les deux valeurs de x, il en existeroit une troisième $f.\delta$, qui rendroit le polynome $=0$ (9). Il seroit donc divisible par $x-\delta$, et par conséquent il existeroit une valeur réelle qui rendroit le polynome égal à zéro, ce qui est contre la supposition.

Nota. Cette démonstration suppose que le premier terme du polynome est élevé à une puissance paire ; si l'exposant $n-m$ étoit impair en donnant à x une valeur négative plus grande que toute grandeur assignable, la valeur du polynome seroit négative : mais il sera démontré (35) que ce polynome ne peut être que d'un rang pair ; ainsi le premier terme ne peut jamais acquérir une valeur négative.

Le polynome $x^{n-m}+px^{n-m-1}+qx^{n-m-2}+\ldots u$ peut être divisible par plusieurs facteurs réels doubles, ou multiples d'un rang pair de la forme $(x-a)^{2n}$, et comme ces facteurs sont toujours positifs, quelque valeur qu'on donne à x, il est visible que le polynome qui n'aura que de pareils facteurs réels ne pourra jamais recevoir une valeur négative.

Quoiqu'il n'existe pas de valeur réelle qui puisse rendre zéro le facteur polynome $x^{n-m}+px^{n-m-1}+qx^{n-m-2}+\ldots+u$, la généralité des formules algébriques qui sont indépendantes des valeurs particulières qu'on peut donner aux quantités, fait qu'on peut regarder le polynome comme formé d'autant de facteurs simples qu'il y a d'unités dans l'exposant $n-m$; c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$x^{n-m}+px^{n-m-1}+qx^{n-m-2}+\ldots+u = (x-r)(x-s)(x-t)\ldots$$

Les facteurs non réels de ce polynome, c'est-à-dire ses facteurs simples, sont appelés imaginaires, et les valeurs r, s, t, sont appelées les racines imaginaires de l'équation.

12. *Si une des racines de l'équation est représentée par* a, *ce nombre* a *sera un diviseur du dernier terme* V.

Car si a est une racine, on a, abstraction faite du signe, $a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}+Ra^{n-3}\ldots=V$: or le premier membre de cette équation est divisible par a; donc le second qui lui est égal, est aussi divisible par a, et par conséquent a est un des diviseurs de V: par la même raison si b, c, d, sont des racines entières, positives ou négatives de l'équation, V sera divisible par $b, c, d\ldots$ donc V est le produit de toutes les racines de l'équation, et par conséquent si l'équation a une racine $=0$, le dernier terme de l'équation, c'est-à-dire le terme sans x, doit manquer dans l'équation.

13. *Si les coefficiens* P, Q, R... *sont tous des nombres entiers, l'équation ne peut pas avoir pour racine un nombre rationnel à moins qu'il ne soit entier.*

Car si dans l'hypothèse dont nous parlons, l'équa-

tion avoit une racine fractionnaire, en représentant cette racine par la fraction $\frac{a}{b}$ réduite à l'expression la plus simple, il faudroit que l'on eût l'équation

$$\frac{a^n}{b^n}+P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}+R\frac{a^{n-3}}{b^{n-3}}+\ldots+V=0.$$

Si on multiplie tous les termes de cette équation par b^n, on aura $a^n+Pba^{n-1}+Qb^2a^{n-2}\ldots\ldots+Sb^{n-2}a^2+Tb^{n-1}a=Vb^n$, abstraction faite du signe : le premier membre de cette équation est divisible par a, donc Vb^n sera aussi divisible par a, mais a et b sont premiers entr'eux par la supposition ; donc V doit être divisible par a. Soit $V=ma$, m et a étant des entiers : divisant toute l'équation par a, on a une seconde équation

$$a^{n-1}+Pba^{n-2}+Qb^2a^{n-3}+\ldots\ldots\ldots sb^{n-2}a=(T+mb)b^{n-1};$$

le premier membre de cette équation est divisible par a, donc $(T+mb)b^{n-1}$ sera divisible par a, et à cause que b^{n-1} ne peut pas se diviser par a, on aura $T+mb=Ka$, K étant un nombre entier ; donc en divisant encore par a, on aura une troisième équation

$$a^{n-2}+Pba^{n-3}+Qb^2a^{n-4}\ldots=(S+Kb)b^{n-2};$$

on aura donc par les mêmes raisons que ci-dessus $S+Kb$ divisible par a, ou $S+Kb=K'a$: en continuant ainsi on parviendra à une équation linéaire

$$a=(P+K^{(n)}b)b, \text{ ou } \frac{a}{b}=P+K^{(n)}b:$$

or le premier membre de cette équation est une fraction irréductible, et le second membre est nécessairement un entier; donc la supposition que nous avons faite ne peut pas avoir lieu, à moins de supposer $b = 1$, et par conséquent si tous les coefficiens de l'équation sont des entiers, les racines ne sauroient être fractionnaires.

14. *Pour transformer les racines de l'équation, les positives en négatives et les négatives en positives, il suffit de changer les signes des termes dans lesquels l'inconnue est élevée à une puissance impaire.*

Car on opérera le changement demandé en écrivant $-x$ à la place de $+x$; or si l'on met $-x$ à la place de $+x$, les puissances impaires deviendront négatives, donc les termes affectés de ces puissances seront les seuls qui changeront de signe.

15. *On peut transformer une équation en une autre dont les racines sont égales à celles de la proposée, augmentées ou diminuées d'une quantité déterminée.*

Car si l'on fait $x = y \pm m$, on changera l'équation proposée en une autre dont l'inconnue sera y; les racines de celles-ci étant connues, on aura les valeurs correspondantes de x par l'équation $x = y \pm m$.

On peut par cette transformation faire disparoître un terme quelconque de l'équation, car soit l'équation générale

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V = 0,$$

si on suppose $x = y + z$, on aura la transformée

$$\left.\begin{array}{llll} +nzy^{n-1} + \frac{n.n-1}{2}z^2.y^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}z^3.y^{n-3} + \ldots + & z^n & & \\ +P & +n-1Pz & + \frac{n-1.n-2}{2}Pz^2 & +\ldots+Pz^{n-1} \\ & +Q & +n-2.Qz & +\ldots+Qz^{n-2} \\ & & +R & +\ldots\ldots Rz^{n-3} \\ & & & +\ldots\ldots \\ & & & +\ldots\ldots \\ & & & +\ldots+V \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on veut que le second terme de cette équation disparoisse, il faudra faire son coefficient $nz + P = 0$, ce qui donne $z = -\frac{P}{n}$, on fera disparoître le troisième terme en supposant $\frac{n.n-1}{2}z^2 + n-1\,Pz + Q = 0$, et l'on aura une équation du second degré pour déterminer z; elle seroit du troisième si on vouloit faire disparoître le quatrième terme, et ainsi des autres.

La supposition propre à faire disparoître le second terme est la plus simple de toutes, c'est aussi la seule dont on fait usage; elle nous apprend que pour que le second terme d'une équation s'évanouisse, il faut supposer l'inconnue x égale à une autre inconnue y, plus ou moins le coefficient du second terme divisé par l'exposant de l'équation; le signe + a lieu lorsque le second terme est négatif, et le signe — a lieu lorsque le second terme de l'équation est positif.

Si l'on vouloit faire évanouir deux termes d'une équation, la supposition de $x = y + z$ ne suffiroit pas, parce qu'elle n'introduiroit qu'une seule indéterminée z; mais si on suppose $x^2 = y + a + bx$,

on pourroit faire disparoître deux termes à-la-fois, en déterminant convenablement les deux indéterminées a, b.

16. *On peut transformer une équation en une autre dont les racines soient égales aux racines de la proposée, multipliées par une quantité donnée.*

Car si nous supposons $x = \frac{y}{m}$ ou $y = mx$, on changera l'équation en une autre dont les racines seront représentées par y; or $y = mx$, donc les racines de la transformée seront égales à celles de la proposée, multipliées par m.

On peut par cette transformation changer une équation qui a des coefficiens fractionnaires en une autre qui n'en contient pas.

Car soit l'équation

$$x^n + \frac{p}{f}x^{n-1} + \frac{q}{g}x^{n-2} + \frac{r}{k}x^{n-3} + \ldots + \frac{u}{l} = 0;$$

en supposant $x = \frac{y}{m}$ et multipliant tous les termes par m^n, on a

$$y^n + \frac{p}{f}my^{n-1} + \frac{q}{g}m^2y^{n-2} + \frac{r}{k}m^3y^{n-3} \ldots + \frac{u}{l}m^n = 0.$$

Si dans cette équation on fait $m = fgk\ldots l$, il est visible que tous les dénominateurs disparoîtront, d'où on peut conclure que pour changer une équation qui a des coefficiens fractionnaires en une autre qui n'en a pas, il faut faire $x = y$ divisé par le produit de tous les dénominateurs.

On a vu (13) que si les coefficiens de tous les termes de l'équation sont des entiers, les racines ne sauroient être fractionnaires; on peut donc toujours

toujours faire en sorte que les racines de l'équation à résoudre soient des nombres entiers.

Le petit nombre de théorêmes démontrés dans les numéros précédens va nous servir pour trouver toutes les racines commensurables d'une équation, soit qu'elles soient entières, soit qu'elles soient fractionnaires, soit qu'elles soient positives, soit qu'elles soient négatives.

17. On a vu (12) que si a est une racine de l'équation, cette racine est diviseur du dernier terme, et toute l'équation est divisible par $x \pm a$ (10); donc si après avoir cherché tous les diviseurs du dernier terme on essaie de diviser l'équation par $x \pm$ chaque diviseur, ceux qui donneront un quotient exact et sans reste seront les racines de l'équation. Cette méthode est générale, et fera toujours connoître directement les racines commensurables positives ou négatives de l'équation lorsqu'*elles sont entières; si elles sont fractionnaires*, on commencera préalablement par préparer l'équation; c'est-à-dire qu'on la convertira en une autre dont les racines soient entières et ayant un rapport connu avec celles de la proposée (16). Nous allons éclaircir cette méthode par quelques exemples: nous les choisirons parmi les équations qui n'ont que des racines commensurables.

18. Soit l'équation

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

on cherchera d'abord les diviseurs du dernier terme, et l'on trouvera 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30: on essaiera de diviser l'équation par $x - 1$; la division réussit, donc 1 est une racine de l'équation: on divisera le quotient par $x - 2$; la division réussit encore, donc 2 est la seconde racine de l'équation: on prendra pour troisième diviseur

$x-3$, qui donnera pareillement un quotient sans reste, donc 3 est la troisième racine positive de l'équation : si on cherche à diviser par $x-5$, la division ne réussira pas ; mais si on divise l'équation par $x+5$, la division réussit, donc -5 est une racine négative de l'équation ; c'est-à-dire que la proposée peut être mise sous la forme suivante :

$$(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x+5)=0.$$

On verra dans la suite (33) comment on peut juger du nombre des racines positives et des racines négatives d'une équation.

On demande les racines de l'équation du troisième degré

$$x^3+x^2-34x+56=0.....$$

Les diviseurs du dernier terme sont, 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56... Les seuls de ces diviseurs qui puissent satisfaire à l'équation proposée, sont $+2$, $+4$, -7 : donc l'équation est divisible par $x-2$, $x-4$, $x+7$; ce qui donne pour racines de l'équation

$$x=2,\quad x=4,\quad x=-7.$$

On peut quelquefois rendre l'équation plus simple par des préparations que la forme de l'équation indique : par exemple, si on proposoit l'équation

$$x^2-76x+240=0,$$

on pourroit remarquer que $240=8\times 30$ et $76=4\times 19$; donc en faisant $x=2y$, en vertu du théorême démontré (16), toute l'équation sera divisible par 8, et l'on aura

$$y^2-19y+30=0,$$

équation plus facile à résoudre que la première,

parce que le dernier terme 30 a moins de diviseurs que 240 : cette dernière résolue donne

$$y = 2, \quad y = 3, \quad y = -5,$$

on aura donc pour la proposée,

$$x = 4, x = 6, x = -10.$$

19. Lorsque le dernier terme de l'équation a un grand nombre de diviseurs, la méthode que nous venons d'expliquer pour trouver les racines commensurables entières est longue et pénible. Newton a donné le moyen suivant pour la simplifier.

Si l'équation proposée a un diviseur simple, on peut le représenter par $x + m$, et puisque ce diviseur est supposé diviser généralement l'équation, il la divisera encore quelque valeur qu'on donne à x : si l'on suppose $x = 0$, l'équation proposée se réduira à son dernier terme, et le diviseur deviendra m ; donc m doit être un diviseur du dernier terme de l'équation : si on suppose $x = -1$, la valeur de l'équation que nous représenterons par A sera divisible par $m - 1$: si on suppose $x = +1$, la valeur de l'équation représentée par B sera divisible par $m + 1$: or $m - 1, m, m + 1$ forment une progression arithmétique dont la différence est 1, et dont m est le moyen proportionnel arithmétique, donc aucun diviseur du dernier terme ne sera racine de l'équation s'il n'est moyen proportionnel arithmétique entre quelqu'un des diviseurs provenus de la supposition $x = -1$ et $x = 1$.

Soit l'équation $x^3 - 5x^2 - 18x + 72 = 0$, dont on demande les diviseurs commensurables et entiers.

20. Je forme la valeur A en supposant $x = -1$: l'équation devient

$$-1 - 5 + 18 + 72 = 84 = A \ldots$$

Je forme la valeur B en supposant $x = +1$: l'équation devient

$$1 - 5 - 18 + 72 = 50 = B \ldots$$

La supposition de $x = 0$ réduit l'équation à son dernier terme $= 72$.

Je dispose dans une colonne verticale les suppositions, les résultats et les diviseurs, comme on le voit dans le tableau suivant :

$x = -1$	84	1.2.3.4.6.7.12.14.21.28.42.84.	$+3$	$-4.$	$-7.$	-3
$x = 0$	72	1.2.3.4.6.8.9.12.18.24.36.72.	$+4$	$-3.$	$-6.$	-2
$x = +1$	50	1.2.5.10.25.50.....	$+5$	$-2.$	$-5.$	-1

Les seuls diviseurs du dernier terme pris en plus et en moins, qui sont en progression arithmétique croissante dont la différence est 1 avec quelque diviseur provenu de la supposition de $x = -1$ et $x = +1$, ces diviseurs, dis-je, sont $+4$, -3, -6, -2, comme on le voit à la suite du tableau, donc ce sont les seuls qui puissent diviser l'équation, et il est inutile d'essayer les autres : en divisant l'équation par $x + 4$, par $x - 3$, par $x - 6$, la division réussit, donc ces trois diviseurs sont les trois racines de l'équation.

21. Par ce premier essai on trouve souvent plus de diviseurs en progression arithmétique que l'équation n'a de racines; dans ce cas il y en a quelques-uns d'inutiles : on trouvera le moyen de les écarter en donnant une nouvelle valeur à x; en faisant, par exemple, $x = +2$. Par cette nouvelle supposition le diviseur de l'équation devient $m + 2$, qui étant en progression arithmétique avec les autres, avertit que parmi les progressions déjà trouvées il ne faut admettre que celles qui peuvent être continuées par quelqu'un des diviseurs de la valeur de l'équation, lorsqu'on y fait $x = 2$.

Soit l'équation

$$x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 5x^2 + 11x + 36 = 0,$$

on écrira comme dans le tableau précédent :

$x = -1$	40	1.2.4.5.8.10.20.40...	1..8	—4...—5
$x = 0$	36	1.2.3.4.6.9.12.18.36.	2..9	—3...—4
$x = +1$	30	1.2.3.5.6.10.15.30...	3.10	—2...—3
$x = +2$	74	1.2.37.74.....	....	—1...—2

On remarquera que les deux premières séries demandent pour être continuées les nombres + 4 et + 11 : or ces nombres ne se trouvent pas parmi les diviseurs de l'équation provenus de la supposition $x = 2$, donc les deux premières progressions doivent être rejetées. Les deux dernières progressions peuvent être continuées par les nombres — 1 et — 2 qui se trouvent parmi les diviseurs de 74, donc si l'équation proposée a des diviseurs simples commensurables et entiers, ils ne peuvent être que — 3 et — 4. On peut encore voir facilement que le premier de ces diviseurs seroit exclu par une cinquième supposition; car si la première progression négative étoit à conserver, il faudroit trouver zéro parmi les diviseurs provenus de la supposition $x = +3$, ce qui est impossible; et pour conserver la seconde progression négative, il faudroit trouver — 1 parmi les mêmes diviseurs: or l'unité est diviseur de tous les nombres, donc si l'équation a une racine commensurable et entière elle ne peut être que + 4... L'équation divisée par $x - 4$, donne pour quotient $x^5 + 3x^3 - 5x - 9$, qui ne peut plus se diviser par aucun nombre commensurable, donc l'équation proposée n'a qu'une seule racine entière; savoir, $x = 4$.

Soit l'équation

$$x^3+\frac{31}{6}x^2-\frac{29}{6}x+1=0,$$

dont les coefficiens fractionnaires annoncent des racines fractionnaires : on fera $x=\frac{y}{m}$ (16), l'équation prendra la forme suivante :

$$y^3+\frac{31.m}{6}y^2-\frac{29\,m^2}{6}y+m^3=0;$$

faisant ensuite $m=6$, on a

$$y^3+31y^2-174y+216=0....$$

Parmi les diviseurs du dernier terme on ne trouvera que -2, -3, et $+36$ qui puissent satisfaire à l'équation, donc les racines de la transformée sont $y=2$, $y=3$, $y=-36$, et par conséquent celles de la proposée sont $x=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, et $x=-6$...

Cet exemple suffira pour voir comment il faut s'y prendre pour trouver les racines fractionnaires d'une équation, en la transformant en une autre dont les racines sont entières : on pourra s'exercer, si on le juge à propos, sur les deux exemples suivans :

Exemple premier.

$$x^4-x^3-19x^2+49x-30=0.$$

Exemple second.

$$x^6-x^5-27x^4+25x^3+194x^2-144x-288=0.$$

Les quatre racines de la première équation sont

$$x=1,\ x=2,\ x=3 \text{ et } x=-5.$$

Les six racines de la seconde sont

$$x=2, x=3, x=4, x=-1, x=-3 \text{ et } x=-4.$$

Il arrive souvent qu'une équation qui n'a pas de diviseurs commensurables du premier degré peut se décomposer en facteurs commensurables du

second degré : voyons comment on peut les trouver.

22. Représentons ce diviseur par $x^2 + mx + n$: si l'équation est généralement divisible par le diviseur, elle le sera aussi en donnant à x des valeurs particulières. Nommons A et B ce que devient l'équation par la supposition de $x = -1$, et $x = +1$: le diviseur de A sera $1 - m + n$, le diviseur de B sera $1 + m + n$, et n sera le diviseur de l'équation dans la supposition de $x = 0$. Les trois diviseurs ne sont pas en progression arithmétique ; mais si on retranche une unité de chaque diviseur de A et B pris en plus et en moins, on aura des nombres parmi lesquels doivent se trouver $n - m$, n, $n + m$: or ces nombres sont en progression arithmétique dont la différence est m ; il ne faudra donc s'arrêter qu'à ceux des diviseurs de A et B qui, diminués d'une unité, formeront une progression arithmétique avec quelqu'un des diviseurs du dernier terme de la proposée, lequel sera moyen proportionnel entre les deux autres. On pourra trouver par le premier calcul plusieurs progressions arithmétiques inutiles, on les écartera par de nouvelles suppositions en faisant $x = -2$ et $x = +2$: on formera les valeurs de A', B', et le diviseur deviendra $4 - 2m + n$ et $4 + 2m + n$. Retranchant de ces deux diviseurs $+4$, c'est-à-dire le quarré de la supposition, il restera $n - 2m$ et $n + 2m$ qui continuent la progression ci-dessus ; donc il ne faudra s'arrêter qu'aux progressions qui pourront être continuées par quelque diviseur de A', B' diminuées de 4. Une sixième et une septième supposition, si elles sont nécessaires, finiront de fixer les véritables diviseurs.

Ce diviseur du second degré contient deux indéterminées, m et n ; mais il est visible que la valeur de n est le diviseur qui répond à la supposition de

$x = 0$ et $m + n$, celui qui répond à la supposition de $x = +1$: en retranchant le premier du second, on trouvera la valeur de m, donc les deux indéterminées seront connues.

Lorsque $m = 0$, le diviseur du second degré se réduit à $x^2 + n$; alors il ne s'agit que de déterminer n, et il est visible que $n + 1$ doit être diviseur commun de A et B; et $n + 4$ le sera de A' et B'.

23. Soit l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0,$$

dont on demande les facteurs doubles commensurables, si elle en a.

Par la supposition de $x = -1$ on a $A = 4$... En faisant $x = +1$ on a $B = 20$... La supposition de $x = -2$ donne $A' = 5$, celle de $x = +2$ donne $B' = 85$: on formera donc le tableau suivant :

$B' = 85$	1.5.17.85
$B = 20$	1.2.4.5.10.20
$5 = 5$	1.5
$A = 4$	1.2.4
$A' = 5$	1.5

pour savoir si l'équation a quelque diviseur de la forme $x^2 + n$. Voyons si quelque diviseur du dernier terme 5 de l'équation augmenté d'une unité est en même temps diviseur de A et B : je ne trouve que le diviseur 1; car $1 + 1$ ou 2, est diviseur de 4 et de 20, donc $n = 1$, et par conséquent $x^2 + 1$ peut diviser l'équation.

Cherchons le diviseur de la forme $x^2 + mx + n$... Parmi les diviseurs de A et B qui, diminués d'une unité, forment une progression arithmétique avec quelque diviseur du dernier terme ; on trouve 10 et 2; car 9.5.1 sont en progression arithmétique dont la différence est 4, donc on a $n = 5$,

$m + n = 9$, et par conséquent $m = 4$: ainsi le second facteur double de la proposée sera $x^2 + 4x + 5$. En essayant la division par un de ces facteurs doubles, la division réussit et donne l'autre pour quotient, donc la proposée peut se mettre sous la forme

$$(x^2 + 1)\ (x^2 + 4x + 5) = 0.$$

Le facteur $x^2 + 1 = 0$ donne

$$x = +\sqrt{-1} \text{ et } x = -\sqrt{-1}\ldots$$

Le second facteur $x^2 + 4x + 5 = 0$ donne

$$x = -2 + \sqrt{-1}, x = -2 - \sqrt{-1} :$$

ainsi les quatre racines de l'équation proposée sont imaginaires. Ainsi la méthode des diviseurs que nous venons d'expliquer sert aussi à trouver les racines incommensurables ou imaginaires d'une équation, lorsque celle-ci pourra se décomposer en facteurs commensurables du second degré.

Avant d'entreprendre la résolution générale des équations, nous allons démontrer encore quelques autres théorêmes qui sont de la plus grande importance dans l'analyse.

24. *Toute fonction invariable des racines d'une équation peut être déterminée au moyen des coefficiens de l'équation.* Cette détermination est un problême intéressant pour la théorie générale des équations. Les analystes en ont donné plusieurs solutions : en voici une assez simple.

Soit l'équation

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V = 0,$$

dont les racines sont $a, b, c, d, f, g\ldots$ etc. On demande, 1°. la somme de ces racines, 2°. celle de leurs quarrés, 3°. celle de leurs cubes, et généralement celle de leurs puissances du degré m.

L'équation proposée peut se mettre sous la forme suivante :

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-f)(x-g)\ldots=0,$$

en faisant $x=\frac{1}{y}$, la proposée prendra une forme plus commode ; savoir :

$$1+Py+Qy^2+Ry^3+\ldots+Vy^n\ldots$$
$$=(1-ay)(1-by)(1-cy)(1-dy)(1-fy)(1-gy)\ldots$$

Soit la somme des fractions

$$\frac{1}{1-ay}+\frac{1}{1-by}+\frac{1}{1-cy}+\frac{1}{1-dy}+\ldots\ldots$$
$$=A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\ldots\ldots+My^n$$

En développant ces fractions partielles, on a

$$1+ay+a^2y^2+a^3y^3+a^4y^4+a^5y^5+\ldots\ldots+a^my^m$$
$$1+by+b^2y^2+b^3y^3+b^4y^4+b^5y^5+\ldots\ldots+b^my^m$$
$$1+cy+c^2y^2+c^3y^3+c^4y^4+c^5y^5+\ldots\ldots+c^my^m$$
$$1+dy+d^2y^2+d^3y^3+d^4y^4+d^5y^5+\ldots\ldots+d^my^m$$
$$1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=A+By+Cy^2+Dy^3\ldots\ldots+My^m.$$

On conclut de ce développement que $A=n$, $B=a+b+c+d+\ldots=$ la somme des racines. $C=a^2+b^2+c^2+d^2+\ldots=$ la somme des quarrés des mêmes racines. $D=a^3+b^3+c^3+d^3+\ldots=$ la somme des cubes... $M=a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots=$ la somme des puissances du rang m des mêmes racines.

En réduisant au même dénominateur toutes les fractions du premier membre, le numérateur de la première fraction sera le produit de tous les facteurs simples de la proposée, moins le facteur $1-ay$; le numérateur de la seconde fraction sera le produit de tous les facteurs simples, moins le

facteur $1-by\ldots$ Il en sera de même de tous les autres numérateurs : on pourra donc les écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
1^{er} &= 1+p'y+q'y^2+r'y^3+\ldots+t'y^{n-1}\\
2^{e} &= 1+p''y+q''y^2+r''y^3+\ldots+t''y^{n-1}\\
3^{e} &= 1+p'''y+q'''y^2+r'''y^3+\ldots+t'''y^{n-1}\\
4^{e} &= 1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
5^{e} &= 1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dans ces développemens, on a

$$\begin{aligned}
p' &= P-a\ldots q' = Q-(ab+ac+ad+af..)\ldots r' = R-(abc+abd+abf+..)\\
p'' &= P-b\ldots q'' = Q-(ba+bc+bd+bf..).\ r'' = R-(bac+bad+baf+..)\\
p''' &= P-c\ldots q''' = Q-(ca+cb+cd+cf..)\ldots r''' = R-(cab+cad+caf+..)\\
p'''' &= \ldots\ldots q'''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots r'''' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
p'+p''+p'''+p''''+\ldots\ldots &= nP-P = n-1.P\\
q'+q''+q'''+q''''+\ldots\ldots &= nQ-2Q = n-2.Q\\
r'+r''+r'''+r''''+\ldots\ldots &= nR-3R = n-3.R\\
s'+s''+s'''+s''''+\ldots\ldots &= nS-4S = n-4.S
\end{aligned}$$

Réunissant les numérateurs et leur donnant pour dénominateur commun l'équation proposée, on a

$$\frac{n+\overline{n-1}.Py+\overline{n-2}.Qy^2+n-3.Ry^3+\ldots+Ty^{n-1}}{1+Py+Qy^2+Ry^3+Sy^4+\ldots\ldots+Ty^{n-1}+Vy^n} = A+By+Cy^2+Dy^3+\ldots+My^n$$

effectuant la division indiquée dans le premier membre, on aura

$$n-\left\{\frac{Py+2Qy^2+3Ry^3+4Sy^4+\ldots+n-1Ty^{n-1}+nVy^n}{1+Py+Qy^2+Ry^3+Sy^4+\ldots+Ty^{n-1}+Vy^n}\right\} = A+By+Cy^2+Dy^3+\ldots+My^n$$

On déduit visiblement de cette équation que $A=n$; et divisant le reste de l'équation par y on a

$$-\left\{\frac{P+2Qy+3Ry^2+4Sy^3+\ldots+n-Ty^{n-2}+nVy^{n-1}}{1+Py+Qy^2+Ry^3+Sy^4+\ldots+Ty^{n-1}+Vy^n}\right\}$$
$$=B+Cy+Dy^2+\ldots+My^{n-1}+\ldots$$

Faisant évanouir le dénominateur du premier membre, on a

$$-P-2Qy-3Ry^2-4Sy^3\ldots-n-1Ty^{n-2}-nVy^{n-1}$$
$$=B+Cy+D.y^2+E.y^3+\ldots+My^{n-1}+\ldots$$
$$+BP.+CP.+DP.+\ldots+LP.+\ldots$$
$$+BQ.+CQ.+\ldots+KQ.+\ldots$$
$$+BR.+\ldots+\ldots$$
$$+\ldots$$
$$+BT$$

d'où on déduit les équations (*Alg.* 123.)

$$B+P=0\ldots\ C+BP+2Q=0\ldots$$
$$D+CP+BQ+3R=0\ldots$$
$$E+DP+CQ+BR+4S=0,$$

et ainsi des autres jusqu'à

$$M+LP+KQ+\ldots+\ldots+BT+nV=0.$$

Soit représentée la somme des racines de l'équation par f_1, la somme des quarrés des mêmes racines par f_2, la somme des cubes par f_3, et ainsi des autres puissances, on aura

$$f_1=B, f_2=C, f_3=D, f_4=E\ldots.\ \text{etc.}$$

et pour déterminer ces différentes sommes, on aura les équations ci-dessus, savoir :

$$f_1+P=0\ldots.\ f_2+Pf_1+2Q=0\ldots.$$
$$f_3+Pf_2+Qf_1+3R=0\ldots\ldots$$
$$f_4+Pf_3+Qf_2+Rf_1+4S=0\ldots.$$
$$f_n+Pf_{n-1}+Qf_{n-2}+Rf_{n-3}+\ldots.+nV=0,$$

et si on développe les puissances au-delà du nombre n, et qu'on pousse jusqu'au nombre m, (m

étant $> n$) on aura l'équation générale qui comprend toutes les autres

$$f_m + Pf_{m-1} + Qf_{m-2} + Rf_{m-3} + Sf_{m-4} + \ldots + Vf_{m-n} = 0.$$

Cette formule est aisée à retenir en observant qu'elle est la même que l'équation proposée, dans laquelle on a mis f_m à la place de x^n, f_{m-1} à la place de x^{n-1}, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme de l'équation qui se trouve multiplié par f_{m-n}, lorsque $m > n$. On doit observer encore 1°. de n'admettre dans cette formule que des puissances positives et entières; 2°. que le coefficient de x^{n-m} est nul si $m > n$, 3°. que lorsque $m = n$, $f_{m-n} = f_0 = n$.

25. Par le théorême qu'on vient de démontrer, on a une relation exprimée entre les coefficiens de l'équation et les sommes des différentes puissances des racines; de sorte que pour avoir la somme des puissances m de ces racines il faut connoître celle des puissances $m-1$, $m-2$... etc. Mais il est souvent utile d'avoir tout de suite la somme des puissances m, sans connoître celle des puissances inférieures : ce problême a été résolu par la Grange, Mémoires de Berlin, 1768. Il en a donné une solution plus élégante dans les notes qu'il a ajoutées à la suite de ses Mémoires sur la résolution des équations numériques. Nous donnerons ailleurs une solution très-simple de ce problême; nous nous contenterons de développer ici quelques cas particuliers.

Soit l'équation du sixième degré

$$x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sx^2 + tx + u = 0,$$

en faisant usage des formules démontrées, on déduira les équations suivantes :

$$f_6+pf_5+qf_4+rf_3+f.f_2+tf_1+6u=0$$
$$f_5+pf_4+qf_3+rf_2+f.f_1+5t=0$$
$$f_4+pf_3+qf_2+rf_1+4f=0$$
$$f_3+pf_2+qf_1+3r=0$$
$$f_2+pf_1+2q=0$$
$$f_1+p=0;$$

substituant successivement les valeurs de $f_1, f_2, f_3 \ldots$ on aura, en commençant par la dernière,

$$f_1=-p$$
$$f_2=p^2-2q$$
$$f_3=-p^3+3pq-3r$$
$$f_4=p^4-4qp^2+4rp+2q^2-4f$$
$$f_5=-p^5+5qp^3-5rp^2+(5f-5q^2)p+5qr-5t$$
$$f_6=p^6-6qp^4+6rp^3-(6f-9q^2)p^2$$
$$+(6t-12qr)p+3r^2-2q^3+6qf-6u.$$

Les mêmes formules démontrées (24), donnent aussi

$$P=-f_1 \ldots . \quad 2Q=f_1^2-f_2 \ldots .$$
$$6R=3f_1.f_2-2f_3-f_1^3 \ldots . \text{ etc.}$$

d'où il suit que la somme des différentes puissances des racines d'une équation peut être exprimée en fonctions des coefficiens de l'équation, et réciproquement les coefficiens des différens termes d'une équation peuvent être exprimés en fonction des puissances des racines : il nous reste encore à chercher la somme des termes de la forme $a^m b^n$, ou $a^m b^n c^p$, ou... etc.

26. Soient les deux équations

$$f^m=a^m+b^m+c^m+d^m+\ldots .$$
$$f^n=a^n+b^n+c^n+d^n+\ldots .$$

en les multipliant entr'elles, les produits donneront l'équation

$$f^m.f^n=a^{m+n}+b^{m+n}+c^{m+n}+d^{m+n}+\ldots .$$
$$+a^m b^n+a^m c^n+a^m d^n+b^m a^n+b^m c^n+\ldots .$$

Représentons pour abréger la somme de tous les termes de la forme $a^m b^n$ par $\Sigma a^m b^n$, on indiquera d'après le signe convenu, la somme des termes a^{m+n} par $\int_{m+n}$, et l'on aura l'équation

$$\int_m \cdot \int_n = \int_{m+n} + \Sigma\, a^m b^n \ldots .$$

d'où on déduit

$$\Sigma\, a^m b^n = \int_m \cdot \int_n - \int_{m+n} \ldots .$$

Si on multiplie la somme de tous les termes de la forme $a^m b^n$ par celle de tous les termes de la forme a^p, les exposans m, n, p, se combineront de manière à donner des termes de la forme $a^{m+p} b^n$, d'autres termes de la forme $a^m b^{n+p}$, et enfin des termes de la forme $a^m b^n c^p$: on aura donc

$$\Sigma\, a^m b^n \times \Sigma\, a^p = \Sigma\, a^{m+p} b^n + \Sigma\, a^m b^{n+p} + \Sigma\, a^m b^n c^p ,$$

d'où on déduit

$$\Sigma\, a^m b^n c^p = \Sigma\, a^m . b^n \times \Sigma\, a^p - \Sigma a^{m+p} b^n - \Sigma\, a^m b^{n+p} ;$$

mais l'on a

$$\begin{aligned} \Sigma a^m b^n \times \Sigma\, a^p &= \int_m \cdot \int_n \cdot \int_p - \int_{m+n} \cdot \int_p \\ \Sigma a^{m+p} b^n &= \int_{m+p} \cdot \int_n - \int_{m+n+p} \\ \Sigma a^m b^{n+p} &= \int_{n+p} \cdot \int_m - \int_{m+n+p} . \end{aligned}$$

Réunissant tous ces termes, en ayant égard aux signes, on a

$$\begin{aligned} \Sigma\, a^m b^n c^p = \int_m \cdot \int_n \cdot \int_p - \int_{m+p} \cdot \int_n - \int_{n+p} \cdot \int_m \\ - \int_{m+n} \int_p + 2 \int_{m+n+p} . \end{aligned}$$

Ce détail suffit pour faire voir comment il faudroit s'y prendre pour avoir la somme des termes de la forme $a^m b^n c^p d^q \ldots$ etc. On voit aussi que toutes ces sommes seront données par celles des puissances, et dépendront par conséquent des coefficiens de l'équation proposée.

Les formules $\Sigma\, a^m b^n c^p \ldots$ doivent être modifiées lorsque quelques-uns des exposans $m, n, p \ldots$ deviennent égaux.

Pour rendre la chose plus simple, supposons que l'équation proposée est du quatrième degré, et que ses quatre racines sont a, b, c, d. Ces quatre racines peuvent être prises trois à trois de quatre manières différentes, savoir ; $a\,b\,c$, $a\,b\,d$, $a\,c\,d$, $b\,c\,d$. Les exposans m, n, p, pris trois à trois peuvent se permuter entr'eux de six manières différentes, donc $\Sigma\, a^m\, b^n\, c^p$ sera composé de vingt-quatre termes; mais lorsque deux de ces exposans deviennent égaux, les vingt-quatre termes se réduisent à douze ; car si l'on a $m = n$, les termes $a^m\, b^n\, c^p$, $a^n\, b^m\, c^p$ sont égaux ; il en est de même des termes $a^p\, b^n\, c^m$, $a^p\, b^m\, c^n$... etc. donc pour avoir la valeur de $\Sigma\, a^m\, b^n\, c^p$, il faudra diviser la somme totale par 2 : si les trois exposans m, n, p, étoient égaux, les six termes $a^m\, b^n\, c^p + a^m\, b^p\, c^n + b^m\, a^n\, c^p + b^m\, a^n\, c^p + c^m\, b^n\, a^p + c^m\, a^n\, b^p$ n'en feroient qu'un, répété six fois ; il en seroit de même des autres combinaisons, donc $\Sigma\, a^m\, b^m\, c^m$ ne renfermeroit que quatre termes différens, répétés chacun six fois ; donc pour avoir la valeur de $\Sigma\, a^m\, b^m\, c^m$, il faudra diviser la somme totale par 6.

On a souvent besoin de connoître les valeurs des sommes $\Sigma\, a\,b \ldots \Sigma\, a\,b\,c \ldots \Sigma\, a\,b\,c\,d \ldots \Sigma\, a\,b\,c\,d\,f \ldots$ etc. celles de $\Sigma\, a^2\, b^2 \ldots \Sigma\, a^2\, b^2\, c^2 \ldots \Sigma\, a^2\, b^2\, c^2\, d^2 \ldots \Sigma\, a^3\, b^3 \ldots$ $\Sigma\, a^3\, b^3\, c^3 \ldots \Sigma\, a^3\, b^3\, c^3\, d^3 \ldots$ etc. $\Sigma\, a^n\, b^n \ldots \Sigma\, a^n\, b^n\, c^n \ldots$

Nous allons apprendre à les déterminer, et à former les différentes séries dont le terme général fera connoître chacune des sommes ci-dessus.

On a déjà les équations (24)

$$\left.\begin{array}{l} \int_1 + P = 0 \\ \int_2 + P\int_1 + 2Q = 0 \\ \int_3 + P\int_2 + Q\int_1 + 3R = 0 \\ \int_4 + P\int_3 + Q\int_2 + R\int_1 + 4S = 0 \end{array}\right\} \text{d'où on déduit} \left\{\begin{array}{l} \int_1 = -P \\ \int_2 = -P\int_1 - 2Q \\ \int_3 = -P\int_2 - Q\int_1 - 3R \\ \int_4 = -P\int_3 - Q\int_2 - R\int_1 - 4S \end{array}\right.$$

La

La seconde donne $2Q$, ou

$$2.\Sigma ab = -f_2 - Pf_1 \ldots$$

donc $\Sigma ab = \dfrac{-f_2 - Pf_1}{2}$

La troisième donne $3R$, ou

$$3\Sigma abc = -f_3 - Pf_2 - Qf_1$$

donc $\Sigma abc = \dfrac{-f_3 - Pf_2 - Qf_1}{3}$

La quatrième donne $4S$, ou

$$4\Sigma abcd = -f_4 - Pf_3 - Qf_2 - Rf_1,$$

donc $\Sigma abcd = \dfrac{-f_4 - Pf_3 - Qf_2 - Rf_1 \ldots}{4}$

On déterminera $\Sigma a^2 b^2$ par la formule $\Sigma a^m b^n = f_m f_n - f_{m+n}$, qui donnera

$$\Sigma a^2 b^2 = \frac{(f_2)^2 - f_4}{2} \ldots \Sigma a^3 b^3 = \frac{(f_3)^2 - f_6}{2} \ldots \text{ etc.}$$

On aura aussi

$$\Sigma a^2 b^2 c^2 = \frac{(f_2)^3 - 3f_2 \cdot f_4 + 2f_6}{6} \ldots$$

$$\Sigma a^3 b^3 c^3 = \frac{(f_3)^3 - 3f_3 \cdot f_6 + 2f_9}{6} \ldots$$

Ces différentes formules peuvent être mises sous une forme qui laisse appercevoir facilement la loi de leur formation : nous allons les donner telles qu'on les trouve dans La Grange, en corrigeant une légère erreur qui s'est glissée dans la notation, et que le défaut d'homogénéité dans les termes fait appercevoir facilement.

Représentons par $+P$ la somme des racines de l'équation, par $+Q$ la somme des produits des mêmes racines prises deux à deux, par $+R$ la somme des produits des racines prises trois à trois.. etc. On commencera par déterminer la somme des puissances par les formules

$$\begin{aligned} \int_1 &= P \\ \int_2 &= P\int_1 - 2Q \\ \int_3 &= P\int_2 - Q\int_1 + 3R \\ \int_4 &= P\int_3 - Q\int_2 + R\int_1 - 4S, \text{ etc.} \end{aligned}$$

On formera ensuite les séries suivantes, dont on représentera chaque terme par la lettre écrite au-dessus.

$$\begin{array}{cccc} P & Q & R & S \\ \int_1 & \dfrac{P\int_1 - \int_2}{2} & \dfrac{Q\int_1 - P\int_2 + \int_3}{3} & \dfrac{R\int_1 - Q\int_2 + P\int_3 - \int_4}{4} \\ P' & Q' & R' & S' \\ \int_2 & \dfrac{P'\int_2 - \int_4}{2} & \dfrac{Q'\int_2 - P'\int_4 + \int_6}{3} & \dfrac{R'\int_2 - Q'\int_4 + P'\int_6 - \int_8}{4} \\ P'' & Q'' & R'' & S'' \\ \int_3 & \dfrac{P''\int_3 - \int_6}{2} & \dfrac{Q''\int_3 - P''\int_6 + \int_9}{3} & \dfrac{R''\int_3 - Q''\int_6 + P''\int_9 - \int_{12}}{4} \end{array}$$

Les termes généraux de ces différentes séries donneront les valeurs des sommes

$$\Sigma abc\ldots, \Sigma a^2 b^2 c^2 \ldots, \Sigma a^3 b^3 c^3 \ldots \text{ etc.}$$

(Voyez la résolution des équations numériques, page 205.)

On peut s'assurer facilement de l'identité de ces formules avec celles qui précèdent, en mettant, par exemple, dans le terme R'' la valeur de Q'' et P'', on aura

$$\frac{(\int_3)^3 - 3\int_3\int_6 + 2\int_9}{6}$$

Quant à la manière de la trouver, on supposera une équation dont les racines soient $a^m, b^m, c^m, \ldots$ qu'on représentera par

$x^n - P^{(m)}x^{n-1} + Q^{(m)}x^{n-2} - R^{(m)}x^{n-3} + \ldots$ etc. $= 0$,

et l'on aura

$$P^{(n)} = a^m + b^m + c^m + \ldots = f_m \ldots Q^{(n)} = \Sigma a^m b^m \ldots$$
$$R^{(n)} = \Sigma a^m b^m c^m \ldots$$

On aura donc, par les formules du (n°. 26).

$$\Sigma a^m b^m = \frac{P^{(n)} f_m - f_{2m}}{2}$$

$$\Sigma a^m b^m c^m = \frac{Q^{(n)} f_m - P^{(n)} f_{2m} + f_{3m}}{3}$$

$$\text{or } Q^{(n)} = \Sigma a^m b^m = \frac{P^{(n)} f_m - f_{2m}}{2} \text{ et } P^{(n)} = f_m;$$

donc $\Sigma a^m b^m c^m$ sera tel que le donneroit le troisième terme de la millième série... etc.

Il résulte de tout ce qu'on vient de lire, que toute fonction rationnelle, symétrique ou invariable des racines d'une équation pourra toujours être exprimée en fonctions des coefficiens de l'équation : ce théorême est un principe des plus féconds de la théorie des équations.

27. Si a est une racine de l'équation, en substituant cette valeur à la place de x, on a

$$a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2} + Ra^{n-3} + \ldots + V = 0.$$

Soient les autres racines de l'équation $b, c, d \ldots$ Si on multiplie entr'eux les facteurs

$$(z - (b-a))(z - (c-a))(z - (d-a))\ldots$$

on formera une équation du degré $n-1$, dont les racines seront la différence de chaque racine $b, c, d \ldots$ de la proposée à la racine a; c'est-à-dire que l'on aura

$$z = b - a,\ z = c - a,\ z = d - a \ldots$$
$$\text{ou } a + z = b,\ a + z = c,\ a + z = d \ldots$$

Si on substitue dans la proposée $a + z$ à la place de x, en développant les puissances, on aura

$$a^n + n\,a^{n-1}z + \frac{n.n-1}{2}\,a^{n-2}z^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,a^{n-3}z^3 + \ldots\ldots, z^n$$
$$+ Pa^{n-1} + n-1\,Pa^{n-2}z + \frac{n-1.n-2}{2}P\,a^{n-3}z^2 + \frac{n-1.n-2.n-3}{2.3}Pa^{n-4}z^3 + \ldots + P\,z^{n-1}$$
$$+ Qa^{n-2} + n-2\,Qa^{n-3}z + \frac{n-2.n-3}{2}Qa^{n-4}z^2 + \frac{n-2.n-3\;n-4}{2.3}Qa^{n-5}z^3 + \ldots\; Qz^{n-2}$$
$$+ R\,a^{n-3} + \ldots\ldots$$
$$+ S\,a^{n-4} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ V \ldots\ldots$$
$$= 0.$$

La première colonne verticale s'évanouit d'elle-même, puisque a est une racine de l'équation, et tous les autres termes étant divisibles par z, elle pourra se mettre sous la forme suivante :

$$z^{n-1} + A\,z^{n-2} + Bz^{n-3} + C\,z^{n-4} + \ldots\ldots$$
$$+ L\,z^2 + M\,z + N = 0,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$N = n\,a^{n-1} + n-1\,P\,a^{n-2} + n-2\,Q\,a^{n-3} + \ldots$$
$$M = \frac{n.n-1}{2}a^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{2}\,Pa^{n-3} + \ldots \text{etc.}$$
$$L = \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\,a^{n-3} + \ldots \text{etc.}$$

Cette équation nous servira pour trouver les racines égales d'une équation ; car il est visible que si les deux racines a et b sont égales, la transformée doit avoir une racine = zéro, puisque $z = b - a$ est une racine de l'équation : donc la transformée doit être divisible par z, et par conséquent le dernier terme doit être zéro, c'est-à-dire qu'on doit avoir $N = 0$.

Si dans la proposée on a $b = c = a$, la transformée aura deux racines = zéro, parce que l'on a $z = b - a$, $z = c - a$; donc elle doit être divisible par z^2 : il faut donc que l'on ait en même

temps $N = 0$ et $M = 0$, et ainsi des autres coefficiens de la transformée, lorsque la proposée aura un plus grand nombre de racines égales.

28. La valeur des coefficiens N, M... etc. est aisée à déduire immédiatement de la proposée, en multipliant chaque terme de la proposée par l'exposant de x dans le même terme, et diminuant ensuite cet exposant d'une unité, on formera N (en changeant x en a, si on veut) : multipliant de nouveau chaque terme de N par l'exposant de x, et diminuant cet exposant d'une unité, on formera M, et ainsi des autres ; l'équation étant

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V = 0,$$

on aura

$$N = nx^{n-1} + n-1.Px^{n-2} + n-2.Qx^{n-3} + n-3.Rx^{n-4} + \ldots$$

$$2M = n.n-1x^{n-2} + n-1.n-2.Px^{n-3} + n-2.n-3Qx^{n-4} + n-3.n-4Rx^{n-5} + \ldots.$$

On peut remarquer que n, $n-1$, $n-2$..... forment une progression arithmétique décroissante, dont la différence est 1 ; donc pour former l'équation de condition qui doit avoir lieu en même temps que la proposée, pour que celle-ci ait deux racines égales, il faut multiplier chaque terme de la proposée par le terme correspondant d'une progression arithmétique décroissante, dont le premier terme est l'exposant de x, et le dernier est zéro.

29. Ce théorême généralisé donne la démonstration de la règle de Huddes, qu'on peut énoncer ainsi :

Si une équation a des racines égales, et qu'on multiplie ses termes par ceux d'une progression arithmétique quelconque, la somme des produits sera égale à zéro.

Ecrivons l'équation générale, et au-dessous une progression arithmétique quelconque décroissante,

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + Sx^{n-4} \ldots + Tx + V = 0$$
$$a+nd. + a+\overline{n-1}d. + a+\overline{n-2}d. + a+\overline{n-3}d. + a+\overline{n-4}d. \ldots + a+d+a$$

En multipliant terme à terme on a

$$a\{x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + Sx^{n-4} \ldots + Tx + V\} = 0:$$
$$+dx\{nx^{n-1} + n-1Px^{n-2} + n-2Qx^{n-3} + n-3Rx^{n-4} \ldots + T\}$$

or le premier terme de ce produit est zéro, par la nature de l'équation; et le second est aussi zéro, comme il a été démontré (28), donc.... etc.

30. Puisque l'équation proposée et l'équation $N = 0$ doivent avoir lieu en même temps dans le cas de deux racines égales, il est nécessaire qu'elles aient une racine commune: par la même raison, lorsque l'équation proposée a trois racines égales, il est nécessaire que la proposée et les deux équations de condition $N = 0$, $M = 0$, aient une racine ou un diviseur commun; et le diviseur commun doit contenir les racines égales élevées à une puissance moindre d'une unité que dans la proposée.

Pour le démontrer, supposons que la proposée ait un nombre r de racines égales de la forme $x - a = 0$, un nombre s de racines égales de la forme $x - b = 0$, et plusieurs autres racines inégales; on pourra l'écrire ainsi:

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-3} + \ldots + V = (x-a)^r \times (x-b)^s \times K,$$

K étant le produit de toutes les racines inégales.

Le premier membre étant divisé successivement par chaque racine de l'équation, donnera un nombre n de quotiens, dont la somme sera égale à

$$nx^{n-1} + n-1Px^{n-2} + n-2Qx^{n-3} + n-3Rx^{n-4} \ldots + T(24) = N:$$

Le second membre divisé successivement par les mêmes racines donnera une somme r de quotiens égaux à

$$(x-a)^{r-1}\times(x-b)^{s}\times K;$$

plus une somme s de quotiens égaux à

$$(x-a)^{r}\times(x-b)^{s-1}\times K;$$

plus une somme de quotiens représentée par

$$(x-a)^{r}\times(x-b)^{s}\times K'\ldots$$

Donc on aura généralement

$$N=r(x-a)^{r-1}\times(x-b)^{s}\times K+s(x-a)^{r}\times(x-b)^{s-1}\times K+(x-a)^{r}\times(x-b)^{s}\times K'.$$

Il est aisé de voir à l'inspection de ces termes que le diviseur commun à tous est $(x-a)^{r-1}\times(x-b)^{s-1}$; c'est-à-dire qu'il contient les racines égales de l'équation élevées à une puissance d'un degré moindre d'une unité que la proposée; et comme l'équation $M=0$ se déduit de $N=0$ par les mêmes loix que celle-ci est déduite de la proposée, il s'ensuit que M contiendra le même diviseur que N, mais élevé à une puissance d'un degré moindre d'une unité; c'est-à-dire que le diviseur commun à M, à N, et à la proposée, sera $(x-a)^{r-2}\times(x-b)^{s-2}$.

Soit pour exemple l'équation

$$x^5-4x^4-15x^3+106x^2-196x+120=0,$$

la valeur de N sera

$$5x^4-16x^3-45x^2+212x-196:$$

je cherche le plus grand commun diviseur entre la proposée et la valeur de N, (*Algèbr.* 28) je trouve que ce diviseur est $(x-2)^3$; l'équation proposée a donc trois facteurs égaux, exprimés par $(x-2)^3$: en opérant, sur N comme sur la proposée, on formera la valeur de M, $20x^3-48x^2-90x+212$, et l'on trouvera $x-2$ pour le plus grand commun

diviseur entre la proposée et les valeurs de N et M.

Soit pour second exemple l'équation

$$x^8 - 12x^7 + 38x^6 + 64x^5 - 567x^4 + 1764x^3 + 1056x^2 - 3312x + 2160 = 0;$$

la valeur de N sera

$$8x^7 - 7\times 12x^6 + 6\times 38x^5 + 5\times 64x^4 - 4\times 567x^3 + 3\times 1764x^2 + 2\times 1056x - 3312.$$

Je cherche le plus grand commun diviseur entre ces deux grandeurs, et je trouve

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12.$$

Je forme ensuite la valeur de M, et j'ai

$$8\times 7x^6 - 7\times 6\times 12x^5 + 6\times 5\times 38x^4 + 5\times 4\times 64x^3 - 4\times 3\times 567x^2 + 3\times 2\times 1764x + 2\times 1056.$$

Je cherche le plus grand diviseur entre M et $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$, et je trouve $x - 2$; ainsi $x - 2$ est un des facteurs multiples de l'équation; et comme il a été trouvé par deux opérations successives, il s'ensuit que la proposée est divisible par $(x-2)^3$: le diviseur commun à la proposée et à N, étant divisé par $(x-2)^2$, donne pour quotient $x-3$; donc $(x-3)^2$ est encore un diviseur de la proposée: on a donc pour produit des racines égales de l'équation $(x-2)^3\times(x-3)^2$. En divisant l'équation par ce produit, on a pour quotient $x^3 - 19x - 30$, ce qui donnera les trois racines inégales de l'équation.

31. Elevons-nous maintenant à des considérations plus générales; l'équation en z (27) a pour racines la différence de chaque racine de l'équation proposée avec la racine a: si à la place de cette racine a on met successivement $b, c, d\ldots$ et réciproquement, si on met a à la place des autres racines, on aura différentes équations de la même forme, qui toutes pourront être représentées par la même

équation générale, lorsqu'on aura éliminé du calcul les différentes racines qu'on a considérées d'une manière particulière : ainsi, si de l'équation

$z^{n-1}+Az^{n-2}+Bz^{n-3}+Cz^{n-4}+\ldots+N=0$ (27),

on élimine a au moyen de l'équation

$$a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}+Ra^{n-3}+\ldots+V=0.$$

On aura une équation dont les racines seront les différences qui existent entre chaque racine de la proposée et toutes les autres : cette équation est très-utile dans la théorie des équations. Nous allons nous en occuper plus particulièrement.

Si l'on prend les différences de toutes les racines de l'équation combinées deux à deux de toutes les manières possibles, on formera les facteurs

$z-(a-b)$, $z-(a-c)$, $z-(a-d)$.....
$z-(b-a)$, $z-(c-a)\ldots z-(b-c)$, ...etc.

Tous ces facteurs multipliés entr'eux et égalés à zéro, formeront une équation dont les racines seront les différences des racines de la proposée : cette équation sera de la forme suivante ;

$$z^m+Az^{m-1}+Bz^{m-2}+Cz^{m-3}+\ldots+K=0,$$

et elle aura autant de racines que l'on peut faire de combinaisons deux à deux avec le nombre n de racines de la proposée ; on aura donc $m=n.n-1$.

32. Mais parce que les racines $a-b$, et $b-a\ldots$ $a-c$, et $c-a\ldots b-d$, et $d-b\ldots$ etc. sont égales et de signe contraire, il s'ensuit qu'on pourra mettre l'équation sous la forme suivante :

$(z^2-(a-b)^2)\,(z^2-(a-c)^2)\,(z^2-(b-c)^2)\ldots.$

et en faisant $z^2=y$, on a

$$y^{m'}+Ay^{m'-1}+By^{m'-2}+Cy^{m'-3}+\ldots+K'=0,$$

où l'on a $m'=\dfrac{n.n-1}{2}$.

Il est visible que les racines de cette équation sont les quarrés des différences des racines de la proposée, et que les coefficiens A', B, C, sont des fonctions invariables de ces racines ; puisqu'elles y entrent toutes de la même manière, on pourra donc déterminer ces coefficiens en fonctions de P, Q, R.

Soit l'équation générale du second degré $x^2+px+q=0$, dont les racines sont désignées par a et b : l'équation au quarré des différences sera du premier degré, et exprimée par $y-(a-b)^2=0$ ou $y-(a^2+b^2)+2ab=0$: or $a^2+b^2=p^2-2q$ (25), $2ab=2q$; donc on a

$$y-p^2+4q=0.$$

Soit l'équation générale du troisième degré, dégagée de son second terme pour plus de simplicité (15), $x^3+px+q=0$ (47), dont les racines soient représentées par a, b, c. L'équation au quarré des différences sera du troisième degré, et l'on aura

$$(y-(a-b)^2)\ (y-(a-c)^2)\ (y-(b-c)^2)=0, \text{ ou}$$
$$y^3-\{2\Sigma a^2-2\Sigma ab\}y^2$$
$$+\{\Sigma a^4-2\Sigma a^3b+5\Sigma a^2b^2\}\times y$$
$$-\{\Sigma a^4b^2-6\Sigma a^2b^2c^2+2\Sigma a^3b^2c-2\Sigma a^3b^3-2\Sigma a^4bc\}$$
$$=0.$$

Si on applique ici les formules du (n°. 26), on trouvera que $\Sigma a^2=(f_1)^2-2p=-2p$, à cause de $f_1=0$: $\Sigma ab=p$, donc le coefficient du second terme sera $+6p$,

$$\Sigma a^4=f_4\ ;$$
$$\Sigma a^3b=f_3f_1-f_4=-f_4 :$$
$$\Sigma a^2b^2=\frac{(f_2)^2-f_4}{2}$$

donc le coefficient du troisième terme sera

$$+3f_4+3\left(\frac{(f_2)^2-f_4}{2}\right)=9p^2.$$

$$\Sigma a^4b^2=f_4f_2-f_6,$$

$$\Sigma a^2b^2c^2=\frac{(f_2)^3-3f_4f_2+2f_6}{6},$$

$$\Sigma a^3b^2c=2f_6-f_4f_2-(f_3)^2,$$

$$\Sigma a^3b^3=\frac{(f_3)^2-f_6}{2},$$

$$\Sigma a^4bc=f_4f_1f_1-2f_5f_1-f_4f_2+2f_6=2f_6-f_4f_2.$$

Donc le dernier terme de l'équation sera $27q^2+4p^3$; ainsi l'équation au quarré des différences de l'équation du troisième degré sera

$$y^3+6py^2+9p^2y+27q^2+4p^3=0.$$

Ces calculs sont très-longs, et je ne les ai placés ici que pour servir d'exemple et d'application des *formules sur les sommes des puissances*. On peut voir la manière de les abréger, dans La Grange, page 10 et suivantes.

On formeroit par le même procédé l'équation au quarré des différences de toute équation du quatrième degré, et il est aisé de voir qu'elle monteroit au sixième degré; par la même raison, celle du cinquième degré monteroit au dixième, et ainsi des autres.

33. Deux termes consécutifs d'une équation qui ont le même signe, forment une permanence; s'ils ont des signes différens, ils forment une variation: par termes consécutifs, on entend ceux dans lesquels les exposans de l'inconnue ne diffèrent que d'une unité.

Il ne peut y avoir dans une équation plus de racines réelles positives que de variations, ni

plus de racines réelles négatives que de permanences.

Supposons que le polynome

$$x^n + p\,x^{n-1} + q\,x^{n-2} + r\,x^{n-3} \pm \ldots u,$$

soit d'un degré pair, et qu'il ne puisse pas avoir de valeur négative quelle que soit celle de x (11): nous allons démontrer que toutes les fois qu'on le multipliera par une racine négative, on y introduira au moins une permanence, et toutes les fois qu'on le multipliera par une racine positive, on y introduira une variation.

Pour rendre la démonstration plus simple, ne considérons que les signes de l'équation que nous supposerons, indistinctement et sans ordre, positifs et négatifs, tels, par exemple, que les suivans:

$$+ \;-\; -\; +\; +\; -\; +\; +\; -\; -\; -\; +\;:$$

si on multiplie l'équation dont les termes seroient affectés des signes ci-dessus par $x + a$, les signes du produit seront

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
+ & - & - & + & + & - & + & + & - & - & - & + & \\
 & + & - & - & + & + & - & + & + & - & - & - & +.
\end{array}$$

Il est évident, par la nature de la multiplication, que les signes de la ligne inférieure sont les mêmes que ceux de la ligne supérieure, mais reculés d'un rang de gauche à droite; et le signe de chaque terme sera déterminé par celui du plus grand des deux coefficiens dont il est composé: on remarquera 1°. que lorsque les signes de deux ou plusieurs termes consécutifs seront déterminés par ceux de la même ligne horizontale, supérieure ou inférieure, on n'introduira ni variation ni permanence dans ces termes; car on aura conservé l'ordre des signes tel qu'il étoit dans l'équation avant la multiplication.

2°. Lorsque pour la détermination du signe on passe de la ligne supérieure à la ligne inférieure, on introduit nécessairement une permanence; car on répète dans ce cas le signe supérieur du rang précédent.

3°. Lorsque pour la détermination du signe il sera nécessaire de passer de la ligne inférieure à la ligne supérieure, on peut introduire une variation ou une permanence; car il n'existe aucun rapport entre le signe inférieur d'un terme et le signe supérieur du suivant: si on introduit une permanence, elle ne détruira pas celle que l'on a déjà introduite en passant de la ligne supérieure à la ligne inférieure, et par conséquent au lieu d'une de plus, il y en aura deux: si on introduit une variation, elle détruira la permanence déjà introduite, et l'on sera dans le même cas que si on avoit toujours suivi la ligne supérieure pour la détermination du signe.

Il suit de ces remarques que toutes les fois que, pour la détermination du signe, on se trouve sur la ligne inférieure, on a nécessairement introduit une permanence; or il faut toujours finir par la ligne inférieure, donc on a au moins une permanence de plus.

On peut se convaincre par un raisonnement semblable, que si on multiplie l'équation donnée par une racine positive, on introduira une variation: reprenons pour cela la même équation, en faisant abstraction de la valeur du terme, et ne retenant que le signe. Si on la multiplie par $x - a$, les signes du produit seront

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} + & - & - & + & + & - & + & + & - & - & - & + & \\ - & + & + & - & - & + & - & - & + & + & + & - & , \end{array}$$

où l'on voit que les signes de la ligne inférieure sont

le contraire de ceux de la ligne supérieure reculés d'un rang, en vertu de la règle à suivre pour les signes dans la multiplication ; donc toutes les fois qu'on passe de la ligne supérieure à la ligne inférieure, pour déterminer le signe, on introduit nécessairement une variation ; or il faut toujours finir par la ligne inférieure, donc on aura au moins une variation de plus.

Il suit de cette règle, que si toutes les racines de l'équation sont réelles, il y aura autant de racines positives que de variations dans le signe ; et autant de racines négatives que de permanences : c'est la fameuse règle de Descartes, qui ne la trouva que par induction. Elle a été démontrée et généralisée par Degua.

Ainsi l'équation de l'exemple premier du (n°. 21) a trois racines positives et une négative, parce qu'elle a trois variations et une permanence dans le signe ; l'équation de l'exemple second a trois racines positives et trois négatives, parce qu'elle a trois variations et trois permanences.

Lorsque l'équation manque de quelques termes, il faut avoir soin de les rétablir en leur donnant zéro pour coefficient, et les faisant précéder du signe + ou du signe —, à volonté.

34. On n'a point encore de règle générale pour reconnoître dans une équation proposée le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires ; on peut cependant déterminer si toutes les racines sont réelles, par le moyen de l'équation aux quarrés des différences des racines de la proposée (32) ; car si toutes les racines sont réelles, il est évident que les quarrés de leurs différences seront tous positifs, et par conséquent l'équation aux quarrés des différences n'ayant que des racines positives, aura tous les signes alternativement positifs et négatifs : si au

contraire l'équation aux quarrés des différences a quelque permanence dans les signes, ce sera une marque que l'équation primitive a des racines imaginaires; car on démontrera que les racines imaginaires vont toujours deux à deux, et qu'elles peuvent se mettre sous la forme $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles. La différence de ces deux racines est $2b\sqrt{-1}$, et le quarré est $-4b^2$; donc en pareil cas, l'équation aux quarrés des différences aura des racines négatives, et par conséquent des permanences.

Il suit de l'article précédent que chaque couple de racines imaginaires de la proposée, doit donner au moins une racine négative dans l'équation aux quarrés des différences; or il a été démontré qu'une équation quelconque ne sauroit avoir plus de racines négatives que de permanences, donc le nombre des racines imaginaires ne pourra jamais être plus grand que le double des permanences dans l'équation aux quarrés des différences.

35. *Toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme.*

Car il existe toujours une valeur k assez grande à donner à x, pour que le premier terme x^n de l'équation surpasse la somme de tous ceux qui sont de signe contraire : le signe du résultat dépendra donc uniquement de celui de ce premier terme.

Supposons $x=0$, la valeur de l'équation se réduira à son dernier terme : elle sera positive lorsque ce terme sera positif, et négative lorsqu'il sera négatif.

Faisons ensuite $x=+k$, et $x=-k$, selon que le dernier terme sera négatif ou positif, la valeur de l'équation se trouvera positive dans le premier

cas, et négative dans le second ; donc elle aura passé du négatif au positif, ou du positif au négatif : or une quantité qui dans les différentes valeurs qu'elle peut recevoir passe par degrés du négatif au positif, ou du positif au négatif, doit nécessairement avoir une valeur intermédiaire qui la rende zéro (9) ; donc une pareille équation a au moins une racine réelle dont la valeur est entre o et $+k$, ou entre o et $-k$.

Représentons par a cette racine réelle ; l'équation sera donc divisible par $x \pm a$ (10), et le quotient sera un polynome d'un degré pair ; supposons qu'il existe un second nombre b, qui, mis à la place de x dans le quotient, le rend égal à zéro : cette nouvelle équation pourra se diviser par $x \pm b$, et le quotient ne sera plus que d'un degré impair qui aura par conséquent une troisième racine réelle : donc si l'équation proposée a plus d'une racine réelle, elle en aura trois, ou (en continuant le même raisonnement) cinq, ou sept, ou etc. c'est-à-dire un nombre impair, et par conséquent le nombre des facteurs restans dans l'équation après l'avoir divisée par tous les facteurs réels, ce nombre de facteurs, dis-je, qu'on nomme imaginaires, ne peut être que pair.

36. *Si l'équation est d'un degré pair, et que son dernier terme soit négatif, elle aura au moins deux racines réelles ; une positive, et l'autre négative.*

Car la supposition de $x = o$ rendra la valeur de l'équation négative, la supposition de $x = +k$ la rendra positive, et la supposition de $x = -k$ la rendra encore positive ; donc il existera une valeur réelle positive entre les deux valeurs de x, o et $+k$, et une autre négative entre les deux valeurs o et $-k$, lesquelles mises à la place de x rendront le premier

membre de l'équation = o ; donc l'équation aura deux racines réelles, une positive et l'autre négative.

Soient $+a$ et $-b$ les deux racines réelles : l'équation proposée sera divisible par $(x-a)(x+b)$, et le quotient sera par conséquent d'un degré pair : si on suppose l'équation divisible par un troisième facteur $x \pm c$, le quotient sera d'un degré impair, donc l'équation aura encore un facteur simple réel, et par conséquent le nombre des racines réelles sera deux, ou quatre, ou six... et les racines dites imaginaires seront encore en nombre pair.

37. Nous avons dit qu'on pouvoit toujours donner à x une valeur assez grande pour que le premier terme x^n de l'équation surpassât la somme de tous ceux qui sont de signes contraires.

Pour le démontrer, supposons que P soit le plus grand coefficient négatif de l'équation : si on fait $x = P+1$, on aura

$$x^n = (P+1)^n = P(P+1)^{n-1} + (P+1)^{n-1} :$$

par la même raison

$$(P+1)^{n-1} = P(P+1)^{n-2} + (P+1)^{n-2} \ldots$$

donc on pourra mettre la valeur de x^n sous la forme suivante :

$$x^n = P(P+1)^{n-1} + P(P+1)^{n-2} + P(P^{n-3}$$
$$+ P(P+1)^{n-4} + \ldots + P(P+1) + P + 1.$$

Il est visible que cette valeur de x^n surpassera seule la somme de tous les autres termes ; car on a

$$1^\circ.\ P x^{n-1} = P(P+1)^{n-1},$$
$$2^\circ.\ Q x^{n-2} < P(P+1)^{n-2},$$
$$3^\circ.\ R x^{n-3} < P(P+1)^{n-3},$$
$$4^\circ.\ S x^{n-4} < P(P+1)^{n-4} \ldots \text{etc.}$$

à cause de $P > Q, > R, > S$; donc en général

si P est le plus grand coefficient négatif, l'équation ne pourra avoir de racine égale, ou plus grande que $P+1$.

En supposant $P > Q, > R \ldots$ etc. on suppose aussi que tous les coefficiens de l'équation sont négatifs; mais si la démonstration est vraie dans cette hypothèse, à plus forte raison le sera-t-elle s'il y a quelque coefficient positif.

38. On peut même prendre pour x une quantité moindre que le plus grand coefficient négatif, lorsqu'il y a plusieurs termes positifs avant le premier terme négatif.

Car supposons que l'équation ait cette forme

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} - Rx^{n-3} - Sx^{n-4} \cdot \\ - Tx^{n-5} \ldots - V = 0 \ldots$$

S étant le plus grand coefficient négatif : soit $x = k+1$. Le premier terme pourra se mettre sous la forme suivante :

$$x^n = k \cdot \overline{k+1}^n \times \\ \{\overline{k+1}^{n-3} + \overline{k+1}^{n-4} + \overline{k+1}^{n-5} \ldots + k+1\} + \overline{k+1}^3 \ldots$$

donc l'équation aura la forme

$$P \cdot \overline{k+1}^{n-1} + Q\overline{k+1}^{n-2} + \{k \cdot \overline{k+1}^2 - R\}\overline{k+1}^{n-3} \\ + \{k\overline{k+1}^2 - S\}\overline{k+1}^{n-4} + \{k \cdot \overline{k+1}^2 - T\}\overline{k+1}^{n-5} \\ + \ldots \{\overline{k+1}^3 - V\} = 0.$$

Si on fait $k \cdot \overline{k+1}^2 = S$, tous les termes de l'équation seront positifs, excepté le quatrième qui sera zéro; et comme il ne s'agit que d'une limite, il est visible que si la supposition de $k \cdot \overline{k+1}^2 = S$ donne un résultat positif, à plus forte raison la supposition de $k^3 = S$, ou $k = \sqrt[3]{S}$: donc si on fait $x = 1 + \sqrt[3]{S}$, le premier terme seul sera plus grand que la somme de tous les termes négatifs.

39. Il suit de tout ce qu'on vient de dire dans les articles précédens, que toute équation d'un degré impair a nécessairement une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme; et toute équation d'un degré pair dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive, et l'autre négative : si le dernier terme de l'équation d'un degré pair est positif, il peut arriver que toutes ses racines soient imaginaires, et dans ce cas l'équation ne pourroit pas se décomposer en facteurs simples réels; mais nous allons démontrer que lors même qu'elle a toutes ses racines imaginaires, elle peut se décomposer en facteurs réels du second degré.

La démonstration de cette proposition dépend de celle des deux théorêmes suivans.

Théorême premier.

40. Soit une équation quelconque d'un degré pair, dont les racines sont a, b, c, d... etc. Soit formée une équation qu'on nommera *auxiliaire*, dont les racines soient fonctions des racines de la proposée prises deux à deux, et de la forme $a+b+mab$: je dis 1°. que si la proposée est du degré n, l'auxiliaire sera du degré $\frac{n.n-1}{2}$: car si la proposée a un nombre n de racines, on pourra former un nombre $\frac{n.n-1}{2}$, combinaisons, en les prenant deux à deux, de la forme $a+b+mab$. 2°. Si l'auxiliaire est d'un degré impair, la proposée pourra se décomposer en facteurs réels du second degré; car dans cette supposition l'auxiliaire aura au moins une racine réelle (35). Soit cette racine $= a+b+mab$,

comme m est une indéterminée susceptible d'un nombre infini de valeurs, et que le nombre des racines de l'auxiliaire est limité, il s'ensuit qu'il y a nécessairement plusieurs valeurs de m qui rendront réelles plusieurs combinaisons des mêmes racines(1); on aura donc les deux équations

$$a+b+m'ab=r, \text{ et } a+b+m''ab=r',$$

r et r' sont ici employées pour représenter des quantités réelles : on tire de ces deux équations

$$a+b=\frac{m''r-m'r'}{m''-m'}\ldots ab=\frac{r'-r}{m''-m'},$$

(1) Pour rendre cette vérité plus sensible, supposons une équation du troisième degré dont les racines soient α, β, γ: l'auxiliaire sera aussi du troisième degré, et ses racines seront de la forme $\alpha+\beta+m\alpha\beta$: si on suppose $m=1$, les trois racines de l'auxiliaire seront

(1) $\alpha+\beta+1\alpha\beta\ldots$ (2) $\alpha+\gamma+\alpha\gamma\ldots$ (3) $\beta+\gamma+\beta\gamma$.

Si $m=2$, on aura

(1) $\alpha+\beta+2\alpha\beta\ldots$ (2) $\alpha+\gamma+2\alpha\gamma\ldots$ (3) $\beta+\gamma+2\beta\gamma$.

Si $m=3$, on aura

(1) $\alpha+\beta+3\alpha\beta\ldots$ (2) $\alpha+\gamma+3\alpha\gamma\ldots$ (3) $\beta+\gamma+3\beta\gamma$.

Si $m=4$, on aura

(1) $\alpha+\beta+4\alpha\beta\ldots$ (2) $\alpha+\gamma+4\alpha\gamma\ldots$ (3) $\beta+\gamma+4\beta\gamma$.

Supposons que la racine réelle de la première auxiliaire soit la racine (1), celle de la seconde, la racine (2), celle de la troisième, la racine (3); il est visible que quelle que soit la racine réelle de la quatrième auxiliaire, il faudra qu'elle donne la même combinaison réelle qu'une des précédentes. Si la racine réelle de la quatrième auxiliaire étoit $\alpha+\beta+4\alpha\beta$, elle coincidera avec la racine réelle de la première; si la racine réelle de la quatrième auxiliaire est $\alpha+\gamma+4\alpha\gamma$, elle coincidera avec la racine réelle de la seconde; et si la racine réelle de la quatrième auxiliaire est $\beta+\gamma+4\beta\gamma$, elle coincidera avec la racine réelle de la troisième : donc il y aura au moins deux valeurs différentes réelles de $a+b+mab$.

donc $a+b$ et ab sont des quantités réelles, chacune prise séparément.

Donc le facteur double $x^2-(a+b)x+ab$ résultant des deux facteurs simples $(x-a)$ $(x-b)$, sera réel: or l'équation proposée est nécessairement divisible par ce facteur, puisque a et b en sont les racines; donc si l'auxiliaire est d'un degré impair, la proposée pourra se décomposer en facteurs réels du second degré.

Théorême second.

41. Si l'auxiliaire est de degré pair, et qu'elle soit résoluble en facteurs réels du second degré, la proposée sera aussi résoluble en facteurs réels du second degré.

Car soient a', b', c', d'...etc. les racines de l'auxiliaire (lesquelles racines peuvent être toutes imaginaires), on aura pour lors

$$z^2-(a'+b')z+a'b',$$

pour facteur double réel de la seconde, l'auxiliaire; donc a', qui peut être imaginaire, pourra avoir la forme

$$c+g\sqrt{-1}, \text{ et } b'=c-g\sqrt{-1};$$

ce que l'on trouvera facilement en résolvant l'équation du second degré

$$z^2-(a'+b')z+a'b'=0;$$

mais $a'=a+b+mab$, donc on a généralement

$$a+b+mab=c+g\sqrt{-1},$$

et comme cette forme est indépendante de la valeur de m, il y aura nécessairement une seconde expression

$$a+b+m'ab=c'+g'\sqrt{-1};$$

donc $a+b$ et ab seront chacun séparément réels, ou de la forme $A+B\sqrt{-1}$; c'est-à-dire que

$$a+b=f+f'\sqrt{-1}, \text{ et } ab=h+h'\sqrt{-1}:$$

donc le facteur double de la proposée $x^2-(a+b)x+ab$, pourra avoir la forme

$$x^2-fx+h+(h'-f'x)\sqrt{-1}.$$

L'existence de ce facteur entraîne nécessairement celle d'un second, qui est

$$x^2-fx+h-(h'-f'x)\sqrt{-1},$$

parce qu'un radical carré doit toujours être pris avec les deux signes $\pm$: donc si l'auxiliaire du degré pair, n'ayant pas de facteurs simples réels, a cependant un facteur double, la proposée aura deux facteurs doubles réels, ou deux facteurs doubles imaginaires de la forme suivante:

$$x^2+h-fx+(h'-f'x)\sqrt{-1}.....(1)$$
$$x^2+h-fx-(h'-f'x)\sqrt{-1}.....(2)$$

Si on résout ces polynomes comme des équations du second degré, on trouvera pour le premier

$$x=\frac{f+f'\sqrt{-1}}{2}$$
$$\pm\sqrt{\frac{f^2-f'^2-4h}{4}+\left(\frac{2ff'-4h'}{4}\right)\sqrt{-1}}...(3)$$

$$x=\frac{f-f'\sqrt{-1}}{2}$$
$$\pm\sqrt{\frac{f^2-f'^2-4h}{4}-\left(\frac{2ff'+4h'}{4}\right)\sqrt{-1}}...(4)$$

Ces deux valeurs de x peuvent être mises sous la forme suivante:

$$x = \frac{f \pm f'\sqrt{-1}}{2} \pm \sqrt{M \pm N.\sqrt{-1}}.$$

L'extraction de ce radical quarré, composé d'une quantité réelle M, et d'une autre quantité réelle N, multipliée par la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$, aura aussi la forme $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; car soit l'expression imaginaire

$$\sqrt{M + N\sqrt{-1}} + \sqrt{M - N\sqrt{-1}};$$

élevant au quarré ce binome, on a

$$2M + 2\sqrt{M^2 + N^2},$$

donc

$$\sqrt{M + N\sqrt{-1}} + \sqrt{M - N\sqrt{-1}} = \sqrt{2M + 2\sqrt{M^2 + N^2}},$$

égale une quantité réelle que je représenterai par 2α.

On a aussi

$$\sqrt{M + N\sqrt{-1}} - \sqrt{M - N\sqrt{-1}} = \sqrt{2M - 2\sqrt{M^2 + N^2}} =$$ une quantité imaginaire qu'on peut représenter par $2\beta\sqrt{-1}$.

Prenant la somme de ces deux radicaux, on a

$$\sqrt{M + N\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1};$$

si au lieu de les ajouter on les retranche, on aura

$$\sqrt{M - N\sqrt{-1}} = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Réunissant les deux formules en une seule, on a

$$\sqrt{M \pm N\sqrt{-1}} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}.$$

Donc

$$x = \frac{f}{2} \pm \alpha \pm \left(\frac{f'}{2} \pm \beta\right)\sqrt{-1};$$

soit fait pour abréger

$$\frac{f}{2} + \alpha = \varphi \ldots \frac{f'}{2} + \beta = \omega \ldots \frac{f}{2} - \alpha = \lambda \ldots \frac{f'}{2} - \beta = \pi.$$

Le facteur double (1) se décomposera en ces deux facteurs simples

$$(x - \varphi - \omega\sqrt{-1})\ (x - \lambda - \pi\sqrt{-1});$$

et le facteur double (2) se décomposera en

$$(x - \varphi + \omega\sqrt{-1})\ (x - \lambda + \pi\sqrt{-1}):$$

en multipliant le premier facteur simple du premier facteur double par le premier facteur simple du second facteur double, on a le facteur double réel

$$x^2 - 2\varphi x + \varphi^2 + \omega^2.$$

Les deux autres facteurs simples multipliés entr'eux donnent le facteur double réel

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \pi^2:$$

Donc si l'auxiliaire est d'un degré pair, et qu'elle puisse se décomposer en facteurs réels du second degré, la proposée se résoudra aussi en facteurs réels du second degré.

Si les deux facteurs imaginaires du second degré avoient un diviseur commun, la proposée pourroit être divisible par chacun d'eux en particulier, sans l'être par leurs produits; mais pour lors ce diviseur commun aux deux facteurs doubles doit l'être de leur somme et de leur différence: il divisera donc $h' - f'x$, et par conséquent il ne peut être que $h' - f'x$, ou $k - gx$, en supposant $h' = mk$, et $f' = mg$... Après la division, la proposée sera

d'un degré impair, donc elle aura encore un facteur réel du premier degré, lequel multiplié par $k - g\,x$ donnera un facteur réel du second degré.

Démonstration générale.

42. Si l'on a une équation d'un degré pair, exprimée par $2^i \times f$, f étant un nombre impair (1), son auxiliaire sera d'un degré $\frac{2^i f}{2} \times (2^i f - 1) = 2^{i-1} \times f'$, f' étant un nombre impair : si l'on forme une seconde auxiliaire par le moyen des racines de la première, ayant ses racines de la forme $a' + b' + m\,a'b'$, cette seconde auxiliaire sera du degré $2^{i-2} \times f''$, f'' étant un nombre impair : si l'on forme une troisième, une quatrième, une cinquième... auxiliaire, elles seront du degré $2^{i-3} f'''$, $2^{i-4} f^{iv}$, $2^{i-5} f^{v}$... etc. jusqu'à ce qu'enfin on soit parvenu à une dernière auxiliaire du degré $f^{(*)}$, qui sera nécessairement d'un degré impair. Cela posé, la proposée aura un facteur réel du second degré si son auxiliaire en a un (*théorême second*). Cette première auxiliaire en aura un si la seconde en a un, la seconde en aura un si la troisième en a un, et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernière auxiliaire : celle-ci aura un facteur réel du second degré si la dernière en a un de réel du premier degré ; or cette dernière en aura nécessairement un réel du premier degré, parce qu'elle est d'un degré impair (*théorême premier*), donc en rétrogradant

(1) Car tout nombre pair est le produit d'un nombre impair multiplié par quelqu'un des nombres 2, 4, 8, 16... etc. c'est-à-dire par quelque puissance de 2.

jusqu'à la proposée, on verra qu'elle doit avoir nécessairement un facteur réel du second degré. Si on la divise par ce facteur, on aura une nouvelle équation d'un degré pair qui, par les mêmes raisons que ci-dessus, aura un facteur réel du second degré; donc la proposée pourra généralement se décomposer en facteurs réels du premier ou du second degré.

Ce théorême important a été admis par les analystes avant qu'ils en eussent une démonstration rigoureuse : D'Alembert est le premier qui l'a démontré, en faisant voir en même temps que toutes les expressions imaginaires peuvent se réduire à la forme $m \pm n\sqrt{-1}$; mais il le fit d'une manière indirecte, à l'égard des racines des équations : Euler essaya de le faire par des considérations purement algébriques : Lagrange s'en occupa dans les Mémoires de l'académie de Berlin, 1772 : Laplace a donné, dans le journal de l'Ecole Normale, la démonstration que nous venons de rapporter, en rétablissant les calculs qu'il n'a qu'indiqués, et donnant plus de développement aux idées qu'il avoit présentées d'une manière trop abstraite. Enfin Lagrange a repris la même question dans son dernier ouvrage sur la résolution des équations numériques de tous les degrés; sa démonstration, aussi élégante qu'ingénieuse, demanderoit des détails dans lesquels nous ne pourrions entrer : on la trouvera dans l'ouvrage cité page 202. Celle que nous venons de rapporter ne laisse rien à desirer comme simple démonstration; mais si l'on vouloit résoudre effectivement une équation donnée en ses facteurs réels de deux dimensions, il seroit comme impossible de suivre le procédé indiqué par l'analyse précédente : si l'équation proposée étoit, par exemple, du huitième degré, la première auxiliaire qu'on

trouveroit d'un degré impair seroit du $71,253^e$ degré.

Après avoir décomposé l'équation proposée en facteurs simples réels, si elle en a, ou en facteurs doubles réels, on décomposera ceux-ci en facteurs simples imaginaires de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$: d'où il suit qu'il existe toujours une quantité a réelle ou imaginaire qui, mise à la place de x dans une équation algébrique, fera évanouir tous ses termes, comme nous l'avons supposé (7).

Sur la résolution générale des équations.

43. Nous avons présenté dans l'article précédent les propriétés les plus remarquables des équations, nous allons nous occuper dans celui-ci de leur résolution générale.

La première classe d'équations qui se présente est celle qu'on peut mettre sous la forme suivante $x^n - M = 0$: on la réduira à une forme plus simple en faisant $\frac{x}{\sqrt[n]{M}} = y$, et l'on aura $y^n - 1 = 0$. On voit d'abord que l'unité est une racine de cette équation, et pour trouver les autres, quelle que soit la valeur de n, nous remarquerons qu'il suffit de les déterminer lorsque n est un nombre premier. En effet, soit $n = pq$, la résolution de l'équation $y^{pq} - 1 = 0$ dépendra des deux équations $u^p - 1 = 0$, $z^q - 1 = 0$; car soit $y^p = z$, donc $y^{pq} = z^q$, et par conséquent $z^q - 1 = 0$. Soit α une racine de cette équation, autre que l'unité, on aura donc $y^p = \alpha$, ou $y^p - \alpha = 0$. Représentons $\frac{y}{\sqrt[p]{\alpha}}$ par u, on aura

$w^p - 1 = 0$: si p et q sont encore des multiples, on les décomposera comme on vient de voir, jusqu'à ce qu'on ait pour exposant un nombre premier, qu'on pourra supposer de la forme $2k+1$: l'équation $x^{2k+1} - 1 = 0$ peut se diviser par $x - 1$, le quotient égalé à zéro sera une équation du degré $2k$: tous les termes auront 1 pour coefficient ; et nous démontrerons plus bas (62) que la résolution d'une pareille équation dépend seulement de celle du degré k.

Il suit de l'article précédent que les deux racines de l'équation du second degré $x^2 - 1 = 0$ dépendent de deux équations du premier degré $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$; que les trois racines de l'équation du troisième degré $x^3 - 1 = 0$ dépendent d'une équation du premier degré, et d'une du second ; que les quatre racines de l'équation du quatrième degré $x^4 - 1 = 0$ dépendent de deux équations du second degré ; que les cinq racines de l'équation du cinquième degré $x^5 - 1 = 0$ dépendent d'une équation du premier degré, et d'une du second ; que les six racines de l'équation du sixième degré $x^6 - 1 = 0$ dépendent de deux équations du troisième degré ; que les sept racines de l'équation du septième degré $x^7 - 1 = 0$ dépendent d'une équation du premier degré, et d'une du troisième ; que les huit racines de l'équation du huitième degré $x^8 - 1 = 0$ dépendent de deux équations du quatrième degré ; que les neuf racines de l'équation du neuvième degré $x^9 - 1 = 0$ dépendent d'une équation du premier degré, et d'une du quatrième ; que les dix racines de l'équation du dixième degré $x^{10} - 1 = 0$ dépendent d'une équation du second degré $x^2 - 1 = 0$, et d'une équation du cinquième $x^5 - 1 = 0$: celle-ci dépend à son tour d'une équation du premier degré, et d'une du second ; que les onze racines de l'équation du onzième degré $x^{11} - 1$

$= 0$ dépendent d'une équation du premier degré, et d'une du cinquième, qu'on ne sait pas encore résoudre généralement : ainsi dans l'état actuel de l'analyse, on ne peut trouver généralement les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$, que lorsque n ne surpasse pas 10.

44. L'équation $x^n - 1 = 0$ n'a qu'une racine réelle lorsque n est impair, et elle en a deux lorsque n est pair.

La recherche des racines imaginaires dépend de la division du cercle dans un nombre n des parties, comme on le démontre en Géométrie (c'est le fameux théorême de Côtes); et il est aisé de faire voir que si indépendamment de l'unité on connoît une autre racine α de l'équation, toutes les autres seront données par les termes de la progression géométrique $1 . \alpha . \alpha^2 . \alpha^3 . \alpha^4 . \alpha^5 . \alpha^6 \ldots . \alpha^{n-1}$.

En effet, les racines de l'équation $x^n - 1 = 0$ doivent être telles, que leur somme $= 0$, la somme de leurs produits deux à deux $= 0$, la somme de leurs produits trois à trois $= 0$... etc. le produit de toutes les racines $= 1$. Or l'on a,

$$1°.\ 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots . \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} = 0$$

parce que α est supposé une racine de l'équation;

$$2°.\ 1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \ldots . \alpha^{2n-2} = \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^2 - 1} = 0$$

$$3°.\ 1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \alpha^9 + \ldots . \alpha^{3n-3} = \frac{\alpha^{3n} - 1}{\alpha^3 - 1} = 0$$

$$4°.\ 1 + \alpha^4 + \alpha^8 + \alpha^{12} + \ldots . \alpha^{4n-4} = \frac{\alpha^{4n} - 1}{\alpha^4 - 1} = 0$$

$$5°. \ldots \ldots \ldots \ldots$$

Car toutes ces équations sont divisibles par $\alpha^n - 1$ (10) $= 0$ par la nature de l'équation.

Mais on a vu (26) que les coefficiens $P, Q, R\ldots$ sont des fonctions de $f_1, f_2, f_3\ldots$ telles, que lorsque la somme de ces puissances est zéro, les coefficiens $P, Q, R\ldots$ etc. sont aussi zéro; donc les conditions qui donnent $P=0, Q=0, R=0\ldots$ seront remplies par les racines en progression géométrique. Il faut encore que le produit de toutes les racines soit 1; mais il est visible que le produit de tous les termes de la progression ci-dessus $=\alpha^{\frac{n.n-1}{2}}=(\alpha^n)^{\frac{n-1}{2}}=1$, à cause de $\alpha^n=1$; donc toutes les conditions sont remplies par les termes de la progression géométrique dont ils sont les racines de l'équation $x^n-1=0$. Si l'on continuoit la progression au-delà du terme α^{n-1}, on retrouveroit les mêmes racines; par exemple:

$\alpha^{n+1}=\alpha^n\times\alpha=1\times\alpha=\alpha$, et $\alpha^{n+2}=\alpha^n\times\alpha^2=\alpha^2\ldots$ etc.

45. On peut faire dépendre les équations de la forme $x^{2n}-2px^n+q^2=0$ de celles que nous venons de résoudre; en commençant préalablement par la résoudre à la manière du second degré, on aura

$$x^n-p\mp\sqrt{p^2-q^2}=0;$$

tant que $p^2>q^2$, les valeurs de x^n sont réelles; et en représentant $p+\sqrt{p^2-q^2}$ par M, et $p-\sqrt{p^2-q^2}$ par M', on aura les deux équations

$$x^n-M=0,\quad x^n-M'=0.$$

L'équation $x^n-M=0$ donne $x=\sqrt{M}\times\sqrt{1}$, et comme l'unité a un nombre n de racines du rang n, la résolution de cette équation donnera n racines de la proposée: l'équation $x^n-M'=0$ en donnera pareillement un nombre n, on aura donc ainsi les $2n$ racines de la proposée.

46. Pour avoir la valeur de $\sqrt[n]{M}$, il faut souvent extraire la racine d'une quantité composée d'une partie commensurable et d'une partie incommensurable : soit par exemple $n = 2$ et $M = A + \sqrt{B}$, et cherchons la valeur de l'expression $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. Considérons pour cela les deux radicaux $\sqrt{p+q} + \sqrt{p-q}$; en les élevant au quarré on a

$$2p + 2\sqrt{p^2 - q^2},$$

donc réciproquement

$$\sqrt{2p + 2\sqrt{p^2 - q^2}} = \sqrt{p+q} + \sqrt{p-q} :$$

soit $2p = A$ et $2\sqrt{p^2 - q^2} = \sqrt{B}$,

ou $4p^2 - 4q^2 = B = A^2 - 4q^2$.

On déduit de ces deux équations

$$p = \frac{A}{2} \ldots \text{et } q = \sqrt{\frac{A^2 - B}{4}},$$

et par conséquent $\sqrt{A + \sqrt{B}}$

$$= \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Cette expression seroit illusoire si $A^2 - B$ n'étoit pas un quarré parfait ; donc le caractère auquel on reconnoîtra que l'extraction de la racine quarrée de $A + \sqrt{B}$ est possible, c'est lorsque $A^2 - B$ sera un quarré parfait. Prenons pour exemple $12 + 2\sqrt{35}$ dans ce cas particulier on a

$$A = 12, \; B = 140.$$

donc $A^2 - B = 4$; partant $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$.

Second exemple : $\sqrt{11 + \sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2}$.

On trouveroit par un calcul semblable que

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

on peut donc conclure généralement que

$$\sqrt{p \pm \sqrt{p^2 - q^2}} = \sqrt{\frac{p+q}{2}} \pm \sqrt{\frac{p-q}{2}}$$

Si l'on a $q > p$, le premier membre de l'équation sera imaginaire ; le premier radical du second membre sera réel, et le second sera imaginaire ; c'est-à-dire que $\sqrt{A \pm B\sqrt{-1}}$ sera toujours de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$ (41).

47. Considérons présentement l'équation du troisième et quatrième degré. Depuis long-temps les analystes ont résolu ces équations par diverses méthodes : nous allons donner ici une idée de celle qui paroît avoir été employée la première par Tartalea et Cardan, pour la résolution des équations du troisième degré. On la trouve dans tous les livres d'algèbre ; c'est pourquoi nous n'y insisterons que pour faire connoître les observations que Lagrange y a ajoutées.

Soit l'équation générale du troisième degré privée du second terme qu'on peut toujours faire disparoître (15), $x^3 + px + q = 0$; on supposera $x = y + z$, y et z étant deux nouvelles indéterminées,

minées, dont une sera arbitraire et pourra être déterminée de la manière qu'on jugera la plus convenable : en substituant cette valeur on aura

$$y^3+3y^2z+3yz^2+z^3+p(y+z)+q=0.$$

Les deux termes $3y^2z+3yz^2$ se réduisent à $3yz(y+z)$, de sorte qu'on peut écrire la transformée comme il suit :

$$y^3+z^3+(3yz+p)(y+z)+q=0.$$

Si on suppose actuellement que $3yz+p=0$, ce qui est permis à cause des deux indéterminées, on aura d'un côté $yz=-\frac{p}{3}$, et de l'autre $y^3+z^3=-q$, qui suffiront pour déterminer y et z. La première, élevée au cube, donne $y^3z^3=-\frac{p^3}{27}$, d'où il est facile de conclure d'après la théorie générale des équations, que y^3 et z^3 sont les racines d'une équation du second degré, qui aura pour coefficient du second terme q et pour dernier terme $-\frac{p^3}{27}$: cette équation, qu'on nomme *la réduite*, sera donc $u^2+qu-\frac{p^3}{27}=0$.

Cette équation résolue donne

$$u=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}};$$

nommant A et B ces deux racines, on aura

$$u, \text{ ou } y^3=A \text{ et } z^3=B,$$
$$\text{ou } y^3-A=0 \text{ et } z^3-B=0.$$

48. Si l'on représente par 1, α, α^2, les trois racines cubiques de l'unité, on aura les trois valeurs suivantes de y et z; savoir :

$$y = \sqrt[3]{A},\ \text{ou}\ y = \alpha\sqrt[3]{A},\ \text{ou}\ y = \alpha^2\sqrt[3]{A}$$

$$\text{et}\quad z = \sqrt[3]{B},\ \text{ou}\ z = \alpha\sqrt[3]{B},\ \text{ou}\ z = \alpha^2\sqrt[3]{B}.$$

On pourroit craindre que les trois valeurs différentes de y et z, combinées entr'elles, ne donnassent neuf valeurs différentes de $y+z=x$; mais l'équation $zy = -\frac{p}{3}$, dont nous avons employé le cube, limite ces valeurs et nous avertit qu'il ne faut prendre pour y et z que les combinaisons des racines qui seront telles que yz soit négatif.

Il est d'abord évident 1°. que $AB = -\frac{p^3}{27}$; par conséquent $\sqrt[3]{AB} = -\frac{p}{3}$, donc 1°. $y+z = x = \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ est une racine de la proposée.

$$2°.\ \alpha\sqrt[3]{A}\times\alpha^2\sqrt[3]{B} = \alpha^3\sqrt[3]{AB} = -\frac{p}{3},$$

donc $\alpha\sqrt[3]{A}+\alpha^2\sqrt[3]{B}$ est la seconde racine de la proposée.

$$3°.\ \alpha^2\sqrt[3]{A}\times\alpha\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3},$$

donc $\alpha^2\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B}$ est la troisième racine de la proposée.

49. Ce qui fait que l'équation du second degré donne deux valeurs différentes, c'est la double ra-

cine quarrée de l'unité; mais toute racine cubique doit avoir une triple valeur, par la raison qu'extraire la racine cubique de a, n'est autre chose que résoudre l'équation $x^3 - a = 0$. Cette équation, en faisant $\frac{x}{\sqrt[3]{a}} = y$, se ramène à la forme $y^3 - 1 = 0$, dont une racine est $y = 1$; en divisant l'équation par $y - 1$ on a l'équation du second degré $y^2 + y + 1 = 0$ (17), qui donne

$$y = -\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2},$$

donc on a

$$\alpha = -\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \text{ et } \alpha^2 = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

En rétablissant les trois valeurs de A et B, les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ sont

$$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}},$$

$$x = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}} + \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}},$$

$$x=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}}}.$$

Si A et B sont réels, ce qui arrivera toujours lorsque $\frac{1}{4}q^2+\frac{p^3}{27}$ sera une quantité positive, ou simplement lorsque p coefficient du second terme de l'équation sera positif, l'équation du troisième degré n'aura qu'une racine réelle; savoir :

$$x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}.$$

Si p est négatif, il y aura deux cas à distinguer; 1°. si $\frac{p^3}{27}<\frac{1}{4}q^2$, les valeurs de A et B seront réelles, comme dans le cas précédent, et l'équation n'aura qu'une racine réelle; 2°. si $\frac{p^3}{27}$ est $>\frac{1}{4}q^2$, les valeurs de A et B seront imaginaires; mais les trois racines de l'équation $x^3-px+q=0$ seront réelles.

En effet, soient ces trois racines représentées par a, b, c; si on forme l'équation aux quarrés des différences, on aura

$$y^3-6py^2+9p^2y+27q^2-4p^3=0 \text{ (32)}:$$

or si $\frac{p^3}{27}>\frac{1}{4}q^2$, cette équation n'aura que des variations, et par conséquent ses racines $y=(a-b)^2$, $=(a-c)^2$, $=(b-c)^2$ seront toutes les trois

positives ; donc les trois racines de la proposée a, b, c, ne peuvent qu'être réelles (34).

Je ne parle pas du cas où l'on auroit $\frac{p^3}{27} = \frac{1}{4}q^2$, parce qu'il est visible que l'équation $x^3 - px + q = 0$ auroit dans ce cas deux racines égales ; lorsque les trois racines sont réelles, elles se présentent toujours sous la forme imaginaire. Quelques efforts que l'on ait faits pour les débarrasser de cette forme imaginaire, on n'a pu y parvenir généralement que par la méthode des séries, ce qui a fait donner à ce cas le nom de *cas irréductible*.

50. On peut cependant délivrer ces racines de leur forme imaginaire dans plusieurs cas particuliers ; par exemple, lorsque les quantités comprises sous les radicaux cubiques sont des cubes parfaits, ou que les racines de l'équation sont commensurables.

Soit en effet

$$\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = (p + q)\sqrt[3]{k} \ldots .$$

Par k on entend une quantité arbitraire qu'on pourra supposer $= +1$; on ne l'introduit dans le calcul que pour faire réussir l'extraction des racines cubiques ; on aura aussi

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = (p - q)\sqrt[3]{k}.$$

Multipliant entr'elles les deux équations, on a

$$\sqrt[3]{A^2 - B} = (p^2 - q^2)\sqrt[3]{k^2},$$

ou
$$q^2 = p^2 - \sqrt[3]{\frac{A^2 - B}{k^2}} \ldots\ldots (1)$$

Elevant au cube les deux équations, on a

$$A+\sqrt{B}=(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)\,k.$$
$$A-\sqrt{B}=(p^3-3p^2q+3pq^2-q^3)\,k.$$

Ajoutant d'abord, et soustrayant ensuite les deux équations, on a

$$A=(p^3+3pq^2)k\ldots(2)\ldots\sqrt{B}=(q^3+3p^2q)\,k\ldots(3)$$

Supposons dans l'équation (1) que $\sqrt[3]{\frac{A^2-B}{k^2}}$ soit un cube parfait, ce qui est très-permis, à cause de l'indéterminée k à laquelle on peut donner la valeur $\sqrt{A^2-B}$, si cela est nécessaire, et soit cette racine $=n$; on aura

$$q^2=p^2-n, \text{ ou } p^2=q^2+n.$$

Ces valeurs substituées dans les équations (2), (3), donnent

$$4p^3-3np-\frac{A}{k}=0\ldots(4)$$

ou

$$4q^3+3nq-\frac{\sqrt{B}}{k}=0\ldots(5)$$

Ces deux équations renfermeront les valeurs de p et q, mais il suffit d'en résoudre une; car p étant connu, q le sera facilement.

Si on vouloit résoudre cette équation autrement que par la méthode des diviseurs (17), on tomberoit dans le cercle vicieux; il faut donc chercher les diviseurs du dernier terme de l'équation, après l'avoir préparée convenablement, pour qu'elle n'ait pas de racines fractionnaires (16): parmi ces diviseurs il s'en trouvera nécessairement quelqu'un qui

divisera l'équation, si $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$ est composée d'une partie rationnelle : ce diviseur sera la valeur de p; on déterminera ensuite q par le moyen de l'équation $q=\sqrt{p^2-n}$.

Quelle que soit la valeur de p, elle sera toujours réelle (35) et pourra être représentée par a; celle de q sera réelle ou imaginaire, suivant que p^2 sera $>$, ou $<n$: si l'on a $p^2<n$, q sera de la forme $b\sqrt{-1}$: donc

$$\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=a+b\sqrt{-1},$$

et $$\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=a-b\sqrt{-1}.$$

Exemple. On demande la racine cubique de $7+\sqrt{50}$, et celle de $7-\sqrt{50}$... on a ici

$$A=7,\ B=50\ldots A^2-B=-1;$$

et comme -1 est un cube parfait, on fera $k=1$:

donc $$\sqrt[3]{\frac{A^2-B}{k^2}}=n=-1.$$

L'équation (4) devient $4p^3+5p-7=0$, et parce qu'elle est divisible par $p-1$, il s'ensuit que $p=1$; on aura donc

$$q^2=p^2-n=2:$$

donc $$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=1+\sqrt{2},$$

et $$\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=1-\sqrt{2}.$$

51. La méthode qu'on vient de voir pour résoudre les équations du troisième degré a été accu-

sée de ne donner dans le cas irréductible, les racines sous une forme imaginaire que parce qu'on y fait une supposition qui est contradictoire avec l'état même de la question; en effet, l'esprit de cette méthode consiste à supposer l'inconnue égale à deux indéterminées $y+z$, et à séparer l'équation résultante en ces deux-ci,

$$3yz+p=0, \text{ et } y^3+z^3\pm q=0 \ (47):$$

or, en mettant la première sous cette forme,

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27},$$

il est visible que la question est réduite à trouver deux nombres y^3 et z^3, dont la somme $=\pm q$, et dont le produit est $\frac{p^3}{27}$; ce qui est impossible à moins que le quarré de la demi-somme des deux nombres ne surpasse leur produit: on conclut de-là qu'il n'est pas étonnant qu'en faisant une supposition impossible à réaliser en nombres, on tombe dans des expressions imaginaires, et l'on est induit à croire qu'en s'y prenant autrement, on pourroit éviter ces expressions et n'en avoir que de réelles.

Cette objection a été faite par d'Alembert contre la méthode dont nous parlons. (*Encyclopédie*, cas irréductible.) La réponse suivante est de Lagrange, comme la plus grande partie de ce qui précède.

Reprenons l'équation du troisième degré $x^3-px+q=0$, et supposons que ses trois racines sont a, b, c: on aura par la théorie des équations

$$a+b+c=0; ab+ac+bc=-p \ldots abc=-q:$$

en formant l'équation aux quarrés des différences (32), on a vu que si $27q^2<4p^3$, $a-b$, $a-c$,

$b-c$ sont réels chacun séparément ; donc les trois racines a, b, c sont réelles en pareil cas.

La même équation aux quarrés des différences donne

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = -(27q^2-4p^3),$$

ou $(a-b)(a-c)(b-c) = \sqrt{4p^3-27q^2}$,

et substituant à la place de $-c$ sa valeur $a+b$, on a

$$(2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3) = \sqrt{4p^3-27q^2};$$

ou $$\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}} = \left(\frac{2a^3+3a^2b-3ab^2-2b^3}{2\cdot\sqrt{27}}\right)\sqrt{-1}.$$

Ajoutons de part et d'autre

$$-\frac{mq}{3\sqrt{-3}} = \frac{ma^2b+mab^2}{3\sqrt{-3}}\ldots$$

Extrayant la racine cubique, on aura

$$\sqrt[3]{\frac{-mq}{3\sqrt{-3}}+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{p^3}{27}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{a^3-b^3+(\frac{1}{2}+m)a^2b+(m-\frac{1}{2})ab^2}{2\sqrt{-3}}}.$$

Représentons par $\lambda a-\mu b$ la racine du numérateur du second membre : en éleyant au cube, on a

$$a^3-b^3+(\tfrac{1}{2}+m)a^2b+(m-\tfrac{1}{2})ab^2$$
$$=\lambda^3a^3-3\lambda^2\mu a^2b+3\lambda\mu^2ab^2-\mu^3b^3:$$

comparant les termes homologues, on a

$$\lambda^3=1\ldots\mu^3=1\ldots m+\tfrac{1}{2}=-3\lambda^2\mu\ldots m-\tfrac{1}{2}=3\lambda\mu^2.$$

Les deux premières équations disent que λ et μ sont deux racines cubiques de l'unité. Les deux dernières disent que λ ne peut égaler μ, ou que λ et μ doivent être des racines différentes de l'unité:

$$\text{donc } \mu = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \ldots \lambda = -\frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

et par conséquent

$$2m = 3\lambda\mu(\mu-\lambda) = 3\lambda\mu\sqrt{-3}, \text{ ou } \frac{m}{3\sqrt{-3}} = \frac{1}{2}\ldots$$

On aura donc

$$\frac{\lambda a - \mu b}{\sqrt{-3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}},$$

$$\text{et } \frac{\lambda b - \mu a}{\sqrt{-3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}.$$

En multipliant la première de ces deux équations par λ, la seconde par μ, et les ajoutant, on a

$$a = \lambda\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}} + \mu\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}};$$

multipliant la première par μ, la seconde par λ, et les ajoutant, on a

$$b = \mu \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}$$

$$+ \lambda \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}.$$

On voit, par cette analyse, que la quantité imaginaire n'a été employée que pour faire réussir l'extraction de la racine cubique, sans laquelle on ne pouvoit déterminer séparément a et b; et comme il paroît impossible de pouvoir y réussir autrement, on peut regarder comme une vérité démontrée que l'expression générale des racines du troisième degré dans le cas irréductible ne sauroit être indépendante des imaginaires.

Terminons par un exemple tout ce que nous avons à dire sur la résolution des équations du troisième degré.

Soit $x^3 - 9x - 910 = 0$: en la comparant à l'équation générale $x^3 - px + q = 0$, on a

$$p = 9 \ldots q = -910.$$

Cette équation n'aura qu'une racine réelle, parce que l'on a

$$\frac{1}{4}q^2 > \frac{p^3}{27},$$

et l'on aura

$$\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{206098} = 97\sqrt{22};$$

donc $x = \sqrt[3]{455 + 97\sqrt{22}} + \sqrt[3]{455 - 97\sqrt{22}}$.

Pour extraire la racine cubique de ces binomes je fais $A = 455$, $B = 206998$, donc

$$A^2 - B = 27, \text{ et } \sqrt{A^2 - B} = 3 = n. \quad (50)$$

La valeur de p sera donnée par l'équation $4p^3 - 9p - 455$, à laquelle on satisfait par la condition de $p = 5$. On trouve ensuite $q = \sqrt{25 - 3} = \sqrt{22}$;

donc $x = 5 + \sqrt{22} + 5 - \sqrt{22} = 10$.

Il eût été plus simple de chercher cette racine par la méthode des diviseurs (17).

52. Passons aux équations du quatrième degré, qu'on peut résoudre par plusieurs méthodes: nous suivrons ici celle que La Grange a donnée, et qui est analogue à celle de Cardan, pour les équations du troisième degré.

Soit l'équation $x^4 + px^2 + qx + r = 0$; je la suppose délivrée de son second terme, parce qu'il est toujours possible de le faire disparoître (15).

Soit fait $x = y + z + t$, on aura

$$x^2 = y^2 + z^2 + t^2 + 2(yz + yt + zt),$$

et

$$x^4 = (y^2 + z^2 + t^2)^2 + 4(y^2 + z^2 + t^2)(yz + yt + zt) + 4(y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8yzt(y + z + t);$$

substituant ces valeurs de x, x^2, x^4 dans l'équation proposée, elle deviendra

$$(y^2 + z^2 + t^2)^2 + p(y^2 + z^2 + t^2) + \{4(y^2 + z^2 + t^2) + 2p\} \times \{yz + yt + zt\} + 4(y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + (8yzt + q)(y + z + t) + r = 0.$$

On a ici trois indéterminées y, z, t, et pour les déterminer on égalera à zéro les coefficiens des

quantités $y+z+t, yz+yt+zt$, et l'on aura les trois équations

$$8yzt+q=0 \ldots 2(y^2+z^2+t^2)+p=0.$$
$$(y^2+z^2+t^2)^2+p(y^2+z^2+t^2)$$
$$+4(y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2)+r=0.$$

Si on substitue dans cette dernière équation à la place de $y^2+z^2+t^2$ sa valeur $-\frac{p}{2}$, tirée de la seconde, elle deviendra

$$4(y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2)-\frac{p^2}{4}+r=0.$$

On aura donc pour déterminer y, z, t, les trois équations

$$y^2+z^2+t^2=-\frac{p}{2},$$

$$y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=\frac{p^2}{16}+\frac{r}{4},$$

$$y^2z^2t^2=\frac{q^2}{64};$$

et l'on voit, par la forme de ces équations, que y^2, z^2, t^2 seront les trois racines d'une équation du troisième degré, dont le coefficient du second terme sera $\frac{p}{2}$, celui du troisième terme sera $\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}$, et le dernier terme sera $\frac{q^2}{64}$: cette réduite sera donc

$$u^3+\frac{p}{2}u^2+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)u-\frac{q^2}{64}=0.$$

Désignant par u, u', u'', les racines de cette équation, on aura

$$y^2=u, z^2=u' \ldots t^2=u'',$$

et par conséquent

$$y = \pm\sqrt{u}, \; z = \pm\sqrt{z}, \; t = \pm\sqrt{u''}.$$

En combinant les doubles signes des radicaux on en tireroit huit valeurs différentes de x, et par conséquent deux fois plus qu'il n'en faut; mais il faut observer que les valeurs de y, z, t, doivent satisfaire à l'équation $yzt = -\frac{q}{8}$: donc lorsque le coefficient q est positif dans la proposée, il faudra que le produit des trois quantités y, z, t, soit négatif; et lorsque q est négatif, le produit yzt doit être positif: l'expression de x devra donc être composée dans le premier cas des trois radicaux négatifs, ou de deux positifs et un négatif; et dans le second cas l'expression de x sera composée des trois radicaux positifs, ou de deux négatifs et un positif: on aura donc pour la valeur de x les deux systèmes suivans de racines

$$\begin{array}{l|l} x = -\sqrt{u} - \sqrt{u'} - \sqrt{u''} & x = +\sqrt{u} + \sqrt{u'} + \sqrt{u''} \\ x = -\sqrt{u} + \sqrt{u'} + \sqrt{u''} & x = +\sqrt{u} - \sqrt{u'} - \sqrt{u''} \\ x = +\sqrt{u} - \sqrt{u'} + \sqrt{u''} & x = -\sqrt{u} - \sqrt{u'} + \sqrt{u''} \\ x = +\sqrt{u} + \sqrt{u'} - \sqrt{u''} & x = -\sqrt{u} + \sqrt{u'} - \sqrt{u''} \end{array}$$

53. Le dernier terme de la réduite étant nécessairement négatif, elle aura une racine réelle positive (35). Si les deux autres sont aussi réelles et positives, les quatre racines de la proposée seront réelles: la règle de Descartes fera connoître combien il y en a de positives et combien de négatives. Si la réduite a une racine réelle négative, les quatre racines de la proposée seront imaginaires. Si la réduite a deux racines imaginaires, elles seront de la forme $m + n\sqrt{-1}$, $m - n\sqrt{-1}$; soit u' la première,

et u'' la seconde; $\sqrt{u'}$ sera de la forme $a+b\sqrt{-1}$, et $\sqrt{u''}$ sera de la forme $a-b\sqrt{-1}$: donc

$$\sqrt{u'}+\sqrt{u''}=2a, \text{ et } \sqrt{u'}-\sqrt{u''}=2b\sqrt{-1}:$$

par conséquent la proposée aura deux racines réelles et deux imaginaires. Les deux racines réelles seront de même signe ou de signe contraire; suivant que le dernier terme sera positif ou négatif.

Pour que les trois racines de la réduite soient positives, il faut que tous ses termes soient alternativement positifs et négatifs; donc 1°. p doit être négatif, 2°. $\frac{p^2}{16}$ doit être $>\frac{r}{4}$.

En supposant dans la réduite $u=f-\frac{p}{6}$, on fera évanouir son second terme (15), et elle deviendra

$$f^3-\left(\frac{p^2}{48}+\frac{r}{4}\right)f-\frac{p^3}{864}+\frac{pr}{24}-\frac{q^2}{16}=0:$$

donc les trois racines seront réelles si l'on a

$$\frac{1}{27}\left(\frac{p^2}{48}+\frac{r}{4}\right)^3>\frac{1}{4}\left(\frac{p^3}{864}+\frac{pr}{24}-\frac{q^2}{16}\right)^2.$$

On pourra donc juger de la réalité des quatre racines de l'équation du quatrième degré par la nature des coefficiens de tous ses termes.

Exemple premier. Soit l'équation

$$x^4-\tfrac{17}{2}x^2+10x-\tfrac{11}{16}=0,$$

en la comparant à l'équation générale, on a

$$p=-\tfrac{17}{2}\ldots q=10\ldots r=-\tfrac{11}{16}.$$

La réduite sera

$$u^3-\tfrac{17}{4}u^2+\tfrac{110}{64}u-\tfrac{100}{64}=0,$$

ou en faisant

$$u = \tfrac{f}{4}, \qquad f^3 - 17f^2 + 805 - 100 = 0,$$

on s'assurera aisément que cette réduite est dans le cas irréductible, et que par conséquent elle a ses trois racines réelles : en y appliquant la méthode des diviseurs, on trouve que $f = 2$, ou 5, ou 10 ; donc $u = \frac{1}{2}$, ou $\frac{5}{4}$, ou $\frac{5}{2}$: donc les quatre racines de la proposée sont réelles, et l'on a

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} \ldots x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} \ldots x = -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \sqrt{\tfrac{5}{2}}.$$

Exemple second. Soit l'équation

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 1 = 0;$$

on a ici

$$p = -6 \ldots q = 8 \ldots r = -1 :$$

la réduite sera

$$f^3 - 12f^2 + 40f - 64 = 0,$$

en faisant $u = \frac{f}{4}$: cette équation n'a qu'une seule racine de réelle positive, qu'on trouve aisément par la méthode des diviseurs ; savoir : $f = 8$. En divisant la réduite par $f - 8$, on a pour quotient $f^2 - 4f + 8 = 0$, dont les racines sont $2 \pm 2\sqrt{-1}$; donc

$$u = 2, \; u' = \frac{1 + \sqrt{-1}}{2} \ldots u'' = \frac{1 - \sqrt{-1}}{2}.$$

La proposée aura donc deux racines réelles et deux imaginaires ; les deux réelles sont

$$x = \sqrt{2} +$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{1+\sqrt{-1}}{2}} + \sqrt{\frac{1-\sqrt{-1}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{2}},$$

$$x = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{-1}}{2}} - \sqrt{\frac{1-\sqrt{-1}}{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Les deux racines imaginaires sont

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{1-\sqrt{2}} \ldots x = \sqrt{2} - \sqrt{1-\sqrt{2}}.$$

Exemple troisième. Soit l'équation

$$x^4 + x^2 - 2x + 6 = 0,$$

on a $p = 1$, $q = -2$, $r = 6 \ldots$

la réduite sera donc

$$f^3 + 2f^2 - 23f - 4 = 0,$$

en faisant $u = \frac{f}{4}$: cette dernière tombera dans le cas irréductible, donc elle a ses trois racines réelles; mais par la règle de Descartes elle doit avoir deux racines négatives, donc la proposée aura ses quatre racines imaginaires : ces racines sont

$$x = +1+\sqrt{-1} \ldots x = +1-\sqrt{-1},$$

$$x = -1+\sqrt{-2} \ldots x = -1-\sqrt{-2}.$$

Méthode générale pour résoudre les équations.

54. La méthode la plus générale et la plus directe, la seule qui puisse réussir pour la résolution générale des équations, consiste à faire dépendre

la résolution d'une équation d'un degré quelconque, de la résolution d'une autre d'un degré inférieur ; c'est ainsi que pour résoudre l'équation générale du troisième degré, on forme une réduite du sixième, mais qui peut se résoudre à la manière du second : pareillement la résolution des équations du quatrième degré dépend de celle de sa réduite, qui est du sixième ; mais qui se résout à la manière du troisième. Il existe entre les racines de la proposée et celle de la réduite une dépendance mutuelle, en sorte que les unes étant connues on en peut déduire les autres.

Soit par exemple l'équation du troisième degré

$$x^3 + px + q = 0,$$

dont les racines sont a, b, c, en faisant $x = y + z$, nous avons formé la réduite

$$u^6 + qu - p^3 = 0 \ (47),$$

ce qui a donné

$$a = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}, \ b = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B},$$
$$c = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B} :$$

en multipliant la seconde par α^2, et la troisième par α, les ajoutant avec la première, et remarquant que $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, $\alpha^3 = 1$, on a

$$\sqrt[3]{A} = \frac{a + \alpha^2 b + \alpha c}{3}, \ \alpha\sqrt[3]{A} = \frac{\alpha a + b + \alpha^2 c}{3},$$

$$\alpha^2\sqrt[3]{A} = \frac{\alpha^2 a + \alpha b + c}{3} \ldots \sqrt[3]{B} = \frac{a + \alpha b + \alpha^2 c}{3},$$

$$\alpha\sqrt[3]{B} = \frac{\alpha a + \alpha^2 b + c}{3} \ldots \alpha^2\sqrt[3]{B} = \frac{\alpha^2 a + b + \alpha c}{3};$$

ces six valeurs sont les six racines de la réduite du

sixième degré $y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0$, où l'on voit que ces six racines sont fonctions de a, b, c, racines de la proposée; et réciproquement les racines de la proposée sont fonctions de celles de la réduite.

55. Toutes les méthodes de résoudre une équation se réduisent donc *à déterminer une fonction de ses racines, qui dépende d'une équation d'un degré inférieur, et qui soit telle qu'elle donne facilement les racines de la proposée:* cette manière d'envisager la théorie générale des équations a l'avantage d'éclairer sur la métaphysique même de cette théorie, d'où résulte la méthode la plus directe de parvenir à leur résolution lorsqu'elle est possible.

56. Commençons par l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0 :$$

soient a et b les deux racines de cette équation; on a d'abord $a + b = -p$ et $ab = q$. Cherchons une autre fonction linéaire des deux racines a et b, et nous aurons tout ce qu'il faut pour les déterminer chacune séparément. Je représente cette fonction par le signe $\varphi(a, b)$ (8), c'est-à-dire que je fais $z = \varphi(a, b)$; mais les deux racines de la proposée a et b, étant indépendantes entr'elles, on peut les permuter, et il n'y a pas plus de raison de prendre pour la valeur de z, $\varphi(a, b)$, que $\varphi(b, a)$: la valeur de z sera donc donnée par une équation du second degré

$$(z - \varphi(a, b))\ (z - \varphi(b, a)) = 0\ (1)\ldots$$

(1) Soient a, b, c, trois quantités connues: si l'on demande une quantité qui soit fonction de la somme de deux quel-

Pour faire usage de cette réduite, il faut qu'elle soit plus simple que la proposée : il faut donc qu'elle manque de second terme ; c'est-à-dire que la transformée doit être de la forme $z^2 - h^2 = 0$. Les racines de cette dernière équation sont $x = h$, et $x = \alpha h$, 1 et α étant les deux racines quarrées de l'unité.

Soit $\varphi(a, b) = la + mb$, et par conséquent $\varphi(b, a) = lb + ma$: on aura donc

$$h = la + mb, \text{ et } \alpha h, \text{ ou } lb + ma = \alpha la + \alpha mb.$$

Pour que cette dernière équation ait lieu, il faut que $l = \alpha m$, et $m = \alpha l$; c'est-à-dire $l = -m$, et $m = -l$, à cause de $\alpha = -1$: donc la réduite sera

$$(z - l(a-b))\ (z + l(a-b)) = 0.$$

Si on suppose $l = 1$, ce qui est très-permis, puisque elle a été introduite arbitrairement dans le calcul, et qu'on multiplie, on aura

$$z^2 = a^2 - 2ab + b^2 :$$

---

conques des trois quantités données, il est visible que cette quantité peut être également fonction de $a+b$, ou de $a+c$, ou de $b+c$; et comme ces trois fonctions satisfont également à la condition demandée, il n'y a aucune raison d'en déterminer une exclusivement aux autres ; par conséquent l'équation qui la déterminera doit être du troisième degré, et avoir pour racines $\varphi(a+b)$, $\varphi(a+c)$, $\varphi(b+c)$; c'est donc une propriété bien remarquable de l'analyse mathématique et une suite nécessaire de sa généralité que l'équation d'où dépend la détermination d'une fonction quelconque, renferme toujours toutes les valeurs dont cette fonction est susceptible en y échangeant, les unes dans les autres, les quantités sur l'ordre et la valeur desquelles les conventions n'ont rien établi de particulier : ainsi l'équation qui auroit pour racines $la + mb = \varphi(a, b)$, doit avoir aussi $lb + ma = \varphi(b, a)$, l et m étant deux quantités arbitraires ou indéterminées.

or $a^2+b^2=p^2-2q$ (25), et $ab=q$,

donc $z^2=p^2-4q$, et par conséquent

$$z, \text{ ou } a-b=\pm\sqrt{p^2-4q};$$

en combinant cette équation avec celle-ci $a+b=-p$, on trouve

$$a=-\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ et } b=-\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

On auroit pu parvenir directement à l'équation $a-b=\pm\sqrt{p^2-4q}$, par l'équation aux quarrés des différences (32).

57. Soit l'équation générale du troisième degré

$$x^3+px+q=0,$$

dont les racines sont a, b, c; cherchons directement deux fonctions linéaires des trois racines qui soient données par une équation du second degré, et qui, combinées avec celle-ci

$$a+b+c=0,$$

les déterminent chacune en particulier. Soit une de ces fonctions représentée par $\varphi(a,b,c)$, si on l'appelle z, on aura

$$z=\varphi(a,b,c);$$

mais par un raisonnement semblable à celui que nous avons fait sur les équations du second degré, il est visible que si $\varphi(a,b,c)$ satisfait aux conditions du problême en permutant les racines de la proposée, on aura cinq autres fonctions qui doivent également satisfaire; savoir:

$$\varphi(b,c,a)\ldots\varphi(c,a,b)\ldots\varphi(a,c,b)\ldots\varphi(b,a,c)\ldots\varphi(c,b,a).$$

Toutes ces formes étant généralement admissibles, l'équation qui donnera la valeur de l'une doit donner en même temps celle des autres ; la réduite sera donc du sixième degré : pour pouvoir l'abaisser à un degré moindre que la proposée, il faut qu'elle soit résoluble à la manière des équations du second degré, et qu'elle ait par conséquent la forme $z^6 + Az^3 + B = 0$; ou, ce qui revient au même, il faut qu'elle soit le produit de deux facteurs

$$(z^3 - h^3)(z^3 - h'^3) = 0.$$

Le premier de ces facteurs donne

$$z = h \ldots z = \alpha h \ldots z = \alpha^2 h :$$

le second donnera aussi

$$z = h' \ldots z = \alpha h' \ldots z = \alpha^2 h',$$

$1, \alpha, \alpha^2$ étant les trois racines cubiques de l'unité ; la réduite aura donc la forme suivante :

$$z^6 - (h^3 + h'^3) z^3 + h^3 h'^3 = 0,$$

ou $(z-h)(z-\alpha h)(z-\alpha^2 h)(z-h')(z-\alpha h')(z-\alpha^2 h') = 0.$

Pour satisfaire à ces conditions, il faut qu'en représentant $\varphi(a, b, c)$ par h, on ait

$$1^\circ.\ \varphi(b, c, a) = \alpha\, \varphi(a, b, c) \ldots$$
$$2^\circ.\ \varphi(c, a, b) = \alpha^2 \varphi(a, b, c) \ldots$$

Et en faisant $\varphi(a, c, b) = h'$, on doit avoir

$$1^\circ.\ \varphi(c, b, a) = \alpha\, \varphi(a, c, b),$$
$$2^\circ.\ \varphi(b, a, c) = \alpha^2 \varphi(a, c, b).$$

58. La forme la plus simple que l'on puisse donner à la fonction $\varphi(a, b, c)$ est $la + mb + nc$,

l, m, n étant trois indéterminées : on aura pour lors

$$\varphi(b,c,a) = lb + mc + na...$$
$$\varphi(c,a,b) = lc + ma + nb...$$
$$\varphi(a,c,b) = la + mc + nb...$$

$\varphi(c,b,a) = lc + mb + na... \varphi(b,a,c) = lb + ma + nc$:

il faudra donc que l'on ait

$$lb+mc+na = \alpha(la+mb+nc)... lc+ma+nb$$
$$= \alpha^2(la+mb+nc)... lc+mb+na$$
$$= \alpha(la+mc+nb)... lb+ma+nc$$
$$= \alpha^2(la+mc+nb).$$

Comparant dans chaque équation les termes contenant les mêmes racines, on en déduira

$$l = \alpha m = \alpha^2 n... m = \alpha^2 l = \alpha n... n = \alpha l = \alpha^2 m,$$

et faisant $l = 1$, on a $z^3 - h^3$, c'est-à-dire le produit des trois premiers facteurs

$$= z^3 - (a+\alpha^2 b+\alpha c)^3... z^3 - h'^3;$$

c'est-à-dire le produit des trois derniers facteurs

$$= z^3 - (a+\alpha b+\alpha^2 c)^3 :$$

la réduite sera donc

$$(z^3 - (a+\alpha^2 b+\alpha c))^3 (z^3 - (a+\alpha b+\alpha^2 c))^3 = 0.$$

Si l'on effectue la multiplication, on verra que le coefficient de z^3, et le dernier terme de l'équation sont des fonctions invariables des racines de la proposée, puisque les six combinaisons ou permutations de la fonction $la+mb+no$ y entrent toutes de la même manière.

En effet, on a

$$h^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3\alpha(a^2b + b^2c + ac^2) + 3\alpha^2(ab^2 + bc^2 + a^2c);$$

en changeant b en c on aura la même expression pour h'^3, et faisant pour abréger

$$L = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc.$$
$$M = a^2b + bc^2 + ac^2.$$
$$N = a^2c + bc^2 + ab^2.$$

on aura, à cause de $\alpha + \alpha^2 = -1$,

$$h^3 + h'^3 = 2L - 3(M+N).$$
$$h^3h'^3 = L^2 - 3(M+N) + 9(M+N)^2 - 27MN,$$

où l'on voit que les quantités L, $M+N$, MN, sont en effet des fonctions invariables des racines a, b, c; et il est visible que

$$L = f_3 + 6\Sigma abc = -9q. \quad (26).$$
$$M+N = \Sigma a^2b. = f_2.f_1 - f_3 = 3q, \text{ à cause de } f_1 = 0,$$
$$MN = \Sigma a^4bc + 3\Sigma a^2b^2c^2 + \Sigma a^3b^3$$
$$= 3q^2 + 3q^2 + 3q^2 + p^3 = 9q^2 + p^3 \ldots$$

donc

$$h^3 + h'^3 = -27q \ldots \text{ et } h^3h'^3 = -27p^3;$$

faisant pour abréger $z^3 = 27u$, la réduite deviendra

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (47).$$

Soient A et B les racines de cette équation, on aura donc

$$u = A, u' = B, \text{ et } z = 3\sqrt[3]{A}, z' = 3\sqrt[3]{B};$$

mais $z = a + \alpha^2b + \alpha c$, et $z' = a + \alpha b + \alpha^2c$;

on aura donc trois équations linéaires entre les trois racines de la proposée ; savoir :

$$a+b+c=0,$$
$$a+\alpha^2 b+\alpha c=3\sqrt[3]{A},$$
$$a+\alpha b+\alpha^2 c=3\sqrt[3]{B},$$

d'où on déduira

$$a=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\ldots$$
$$b=\alpha\sqrt[3]{A}+\alpha^2\sqrt[3]{B}\ldots$$
$$c=\alpha^2\sqrt[3]{A}+\alpha\sqrt[3]{B}\ldots$$

ce qui est parfaitement conforme à ce que l'on a trouvé (48).

z et z' étant des racines cubiques, sont susceptibles chacune de trois valeurs qui donnent neuf valeurs différentes pour les racines a, b, c... Cette multiplicité de valeurs tient à ce que les expressions $\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ contiennent le terme $\frac{p^3}{27}$; c'est-à-dire le cube de $\frac{p}{3}$: or ce cube est aussi celui de $\alpha\frac{p}{3}$, et de $\alpha^2\frac{p}{3}$; en sorte que les racines trouvées résoudroient également les deux équations

$$x^3+\alpha p x+q=0\ldots\ x^3+\alpha^2 p x+q=0 :$$

elles sont donc les racines de l'équation du neuvième degré résultant du produit de ces trois équations ; mais on a trouvé plus haut

$$h^3 h'^3=-27p^3,$$

et par conséquent

$$hh' = -3p :$$

il ne faut donc choisir parmi les racines que celles qui, substituées pour a, b, c, rendront hh' négatif.

59. Passons aux équations du quatrième degré, privées du second terme, pour plus de simplicité,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Soient a, b, c, d, les racines de cette équation; en suivant la même méthode que pour les équations du troisième degré, on formera une réduite dont les racines seront $\varphi(a, b, c, d)$; et comme ces racines peuvent être permutées de vingt-quatre manières différentes, et que toutes ces permutations doivent satisfaire également, il s'ensuit que la réduite sera du vingt-quatrième degré: cette réduite ne pourra être d'aucun secours pour la résolution de la proposée, si elle ne s'abaisse au troisième degré, ou si elle ne peut se résoudre à la manière du troisième degré.

Supposons donc que ces vingt-quatre fonctions soient égales entr'elles huit à huit, alors la réduite prendra la forme

$$(z^8 - h^8)(z^8 - h^{18})(z^8 - h^{118}) = 0,$$

laquelle se résoudroit à la manière du troisième; mais comme il entre quatre constantes arbitraires dans la fonction linéaire qu'on prend communément pour la racine de la réduite, on peut leur donner une détermination telle, que les huit racines de chacun des trois facteurs $z^8 - h^8 \ldots$ etc. se réduisent à un plus petit nombre.

Soit en effet

$$s = \varphi(a, b, c, d) = la + mb + nc + pd.$$

Parmi les vingt-quatre fonctions qui résultent des vingt-quatre manières de permuter, choisissons les huit suivantes pour représenter les huit racines du facteur $z^8 - h^8$.

$$\begin{array}{l} la+mb+nc+pd \ldots la+mb+nd+pc \\ ma+lb+nc+pd \ldots ma+lb+nd+pc \\ lc+md+na+pb \ldots lc+md+nb+pa \\ ld+mc+na+pb \ldots mc+ld+nb+pa. \end{array}$$

Si on suppose $m = l$, les huit fonctions sont égales deux à deux et se réduiront aux quatre suivantes :

$$\begin{array}{ll} l(a+b)+nc+pd \ldots & l(a+b)+nd+pc \\ l(c+d)+na+pb & l(c+d)+nb+pa. \end{array}$$

Si dans ces quatre dernières on y suppose $p = n$, elles se réduiront à deux ; savoir :

$$l(a+b)+n(c+d) \ldots l(c+d)+n(a+b).$$

Enfin si dans ces deux fonctions on y suppose $n = -l$, la seconde égalera la première, prise négativement ; donc les huit fonctions linéaires se réduiront aux deux suivantes :

$$l(a+b-c-d) \ldots l(b+c-a-d) :$$

en les multipliant, et faisant $l = 1$, on a le facteur double

$$z^2 - (a+b-c-d)^2.$$

On trouvera huit autres fonctions qui, par les mêmes suppositions sur l, m, n, p, donneront le facteur

$$z^2 - (a+c-b-d)^2.$$

Les huit fonctions restantes donneront

$$z^2 - (a+d-b-c)^2 :$$

donc la réduite pourra se mettre sous la forme suivante :

$$(z^2-(a+b-c-d)^2)(z^2-(a+c-b-d)^2)$$
$$(z^2(a+d-b-c)^2)=0.$$

En développant ces quarrés, chacun séparément, on a pour le premier facteur

$$a^2+b^2+c^2+d^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+4(ab+cd)$$
$$=f_2-2\Sigma.ab+4(ab+cd)$$
$$=-4p+4(ab+cd);$$

et si on met $4z$ au lieu de z^2, le premier facteur deviendra

$$4(z+p-(ab+cd)):$$

si on développe les deux autres facteurs, on trouvera par un calcul semblable que le second deviendra

$$4(z+p-(ad+bc)),$$

et le troisième

$$4(z+p-(ac+bd)):$$

enfin si on fait $z+p=z'$, la réduite prendra la forme suivante :

$$(z'-(ab+cd))(z'-(ad+bc))(z'-ac+bd))=0.$$

On voit par cette dernière équation, qu'au lieu de la fonction linéaire

$$la+mb+nc+pd,$$

on auroit pu prendre la fonction du second degré

$$l(ab+cd),$$

susceptible de trois permutations, comme il est aisé de s'en convaincre.

60. Pour former les coefficiens de la réduite en fonction des racines de la proposée, on fera

$$ab+cd=h, ad+bc=h', ac+bd=h'':$$

on aura ainsi

$$z'^3-(h+h'+h'')z'^2+(hh'+hh''+h'h'')z'-hh'h''=0.$$

On a d'abord

$$1^\circ.\ abcd=r.$$

$$a^2+b^2+c^2=f_2=-2p.$$

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd$$
$$=\Sigma.ab=h+h'+h''=p.$$

$$2^\circ.\ hh'h''=(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$$
$$=abcd(a^2+b^2+c^2+d^2)+\Sigma.a^2b^2c^2.$$
$$=-2pr+\tfrac{1}{2}a^2b^2c^2,\ =-4pr+q^2.$$

$$3^\circ.\ hh'+hh''+h'h''=\Sigma.a^2bc=\frac{2f_4-(f_1)^2}{2}=-4r.$$

donc la réduite deviendra...

$$z'^3-pz'^2-4rz'+4pr-q^2=0,$$

et mettant $4y+p$ à la place de z', on a

$$y^3+\frac{p}{2}y^2+\left(\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4}\right)y-\frac{q^2}{64}=0\ (52).$$

Si on représente par u, u', u'', les trois racines de la réduite, on aura

$$y=u,\ \text{ou}\ 4y=4u;$$

mais $4y=z$, et $4z$ a été mis à la place de z^2, on aura donc

$$z^2=16u,\ \text{et}\ z,\ \text{ou}\ a+b-c-d=\pm 4\sqrt{u}.$$

on aura aussi

$$a+c-b-d=\pm 4\sqrt{u'}$$

et $$a+d-b-c=\pm 4\sqrt{u''}:$$

ces trois équations combinées avec celle-ci $a+b+c+d=0$ donneront

$$a=\pm\sqrt{u}\pm\sqrt{u'}\pm\sqrt{u''},$$

où l'on peut prendre à volonté les radicaux en plus ou en moins; mais comme leur produit doit être égal à $\frac{q}{8}$, si cette quantité est positive, on pourra prendre les trois radicaux positivement, ou deux négatifs et un positif; et si elle est négative, il faudra prendre les trois radicaux négatifs, ou un négatif et deux positifs.

Supposons le coefficient q positif dans l'équation donnée, on aura les quatre racines suivantes (52):

$$a=\sqrt{u}+\sqrt{u'}+\sqrt{u''}\ldots b=\sqrt{u}-\sqrt{u'}-\sqrt{u''}$$
$$c=-\sqrt{u}-\sqrt{u'}+\sqrt{u''}\ldots d=-\sqrt{u}+\sqrt{u'}-\sqrt{u''}.$$

61. Les racines de l'équation que nous venons de résoudre se présentent sous la même forme que dans le n°. 52; on en déduira les mêmes conséquences pour le signe et la réalité des racines: nous ne les répéterons pas ici, mais nous y ajouterons les suivantes.

Si l'équation a deux racines réelles, et qu'elles soient de même signe, elles seront positives, s'il y a dans la proposée plus de variations que de permanences; elles seront négatives, s'il y a plus de permanences que de variations: c'est une suite de la règle de Descartes (33): mais si l'équation avoit tous ses termes, il pourroit arriver qu'elle eût autant de variations que de permanences; pour lors le signe de ses racines sera le même que celui de la fonction $l^3-4lp+8q$, l étant le coefficient du second terme de l'équation.

Pour le démontrer, soit l'équation du quatrième degré, ayant tous ses termes

$$x^4 - l x^3 + p x^2 - q x + r = 0 :$$

supposons que les quatre racines de cette équation soient a', b', c', d'; soient a' et b' les deux racines réelles, et c', d', les deux imaginaires: on aura dans ce cas

$$c' = m + n\sqrt{-1}, \text{ et } d' = m - n\sqrt{-1} :$$

on fera évanouir le second terme en faisant $x = y + \frac{l}{4}$ (15), et le coefficient du quatrième terme deviendra

$$-\left(\frac{l^2 - 4lp + 8q}{8}\right).$$

Appelons ce coefficient $-\frac{Q}{8}$... le dernier terme de la réduite sera donc $-\frac{Q^2}{64}$ (52): on vient de voir (60) que les racines de l'équation du quatrième degré qui manque de second terme étant a, b, c, d, les trois racines de la réduite sont

$$(a+b-c-d)^2, (a+c-b-d)^2, (a+d-b-c)^2,$$

on aura donc

$$(a+b-c-d)\times(a+c-b-d)\times(a+d-b-c) = \pm\frac{Q}{8} :$$

mais parce que l'on a

$$a' = a + \frac{l}{4}, b' = b + \frac{l}{4}, c' = c + \frac{l}{4}, d' = d + \frac{l}{4},$$

on aura

$$a' + b' - c' - d' = a + b - c - d,$$

et par conséquent

$$(a'+b'-c'-d')\ (a'+c'-b'-d')$$
$$(a'+d'-b'-c')=+\frac{Q}{8},$$

ou en mettant à la place des deux racines imaginaires c', d', leurs valeurs, et multipliant,

$$(a'+b'-2m)\left((a'-b')^2+4n^2\right)=+\frac{Q}{8}.$$

Il est visible que le second facteur de ce produit sera toujours positif; donc $a'+b'-2m$ devra être positif lorsque Q sera positif, et il sera négatif lorsque Q sera négatif.

Il ne reste plus qu'à pouvoir s'assurer du signe du facteur $a'+b'-2m$: l'équation du quatrième degré, ayant deux racines réelles et deux imaginaires, pourra se mettre sous la forme suivante :

$$(x^2-2mx+m^2+n^2)\left(x^2-(a'+b')x+a'b'\right)=0.$$

Si les deux racines réelles ont le même signe, $a'b'$ sera positif; d'ailleurs m^2+n^2 est toujours positif : donc si $2m$ et $a'+b'$ sont tous les deux positifs, l'équation n'aura que des permanences : si $2m$ et $a'+b'$ sont tous deux négatifs, l'équation n'aura que des variations : si au contraire elle a des variations et des permanences, il faut que $a'+b'$ et $2m$ n'aient pas le même signe, et par conséquent $a'+b'$ et $-2m$ doivent être de même signe : donc pour juger du signe du facteur $a'+b'-2m$, il suffira de considérer celui de $a'+b'$. Ainsi lorsque Q sera positif, $a'+b'$ doit être positif; et lorsque Q sera négatif, $a'+b'$ doit être négatif. (On trouve ce théorême énoncé sans démonstration dans le Journal de l'Ecole Normale, tome 2, page 314.)

Exemple. Soit l'équation

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 32x + 60 = 0,$$

ayant deux racines positives, $+2$ et $+3$, et deux racines imaginaires : on trouvera que

$$l^3 - 4lp + 8q = +32 \times 8;$$

c'est-à-dire = une quantité positive, et par conséquent de même signe que les deux racines réelles.

Passé le quatrième degré on n'a plus de méthode générale pour résoudre les équations; celle que nous venons d'expliquer sembloit donner quelque espoir de succès dans la résolution des équations du cinquième degré, mais le grand nombre de combinaisons que l'on a à faire pour avoir une réduite d'un degré inférieur au cinquième, a été un obstacle qu'on n'a pu jusqu'ici surmonter : il y a cependant plusieurs classes d'équations qu'on peut abaisser à un degré inférieur à celui sous lequel elles se présentent; cela arrive sur-tout lorsqu'il existe entre les racines de l'équation des relations particulières, ou qu'elle peut se diviser par un facteur réel de forme connue.

62. Si dans une équation d'un degré pair, que nous représenterons par $2n$, chaque racine de l'équation en a une autre correspondante, avec laquelle elle ait un rapport tel que ce rapport reste le même, en y changeant les deux racines entr'elles, alors la résolution de la proposée ne dépend que d'une équation du degré n : telles sont les équations réciproques. On a donné ce nom aux équations dont les coefficiens des termes également éloignés des extrêmes sont les mêmes; telle est l'équation suivante:

$$x^{2n} + px^{2n-1} + qx^{2n-2} + \ldots + qx^2 + px + 1 = 0.$$

Il est visible que si a est une racine de cette équation, $\frac{1}{a}$ en sera une autre, parce qu'en mettant $\frac{1}{x}$ à la place de x, l'équation reste la même : soient $a, b, c, d\ldots$ etc. n racines de cette équation

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\ldots \text{ etc.}$$

seront les n autres racines : donc

$$(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)=x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1$$

sera un facteur double de la proposée,

et $$x^2-\left(b+\frac{1}{b}\right)x+1$$

en sera un autre : nous les représenterons par

$$x^2-z'x+1,\ x^2-z''x+1\ldots$$

L'équation réciproque du degré $2n$ pourra donc se mettre sous la forme

$$x^{2n}+px^{2n-1}+qx^{2n-2}+\ldots+qx^2+px+1$$
$$=(x^2-z'x+1)(x^2-z''x+1)(x^2-z'''x+1)(\ldots x^2-z^{(n)}x+1).$$

En multipliant ces facteurs, on formera un produit du degré $2n$, qui devra être identique avec le premier membre : si on égale les coefficiens des termes semblables, on aura pour déterminer

$$z', z'', z'''\ldots$$

n, équations qui, combinées entr'elles, donneront une équation du degré n ; la résolution de cette équation, avec celle du facteur

$$x^2-zx+1=0,$$

suffira pour avoir les 2 n racines de la proposée.

Soit l'équation

$$x^4+p\,x^3+q\,x^2+p\,x+1=0:$$

elle peut être considérée comme le produit des deux facteurs

$$(x^2-z'x+1)\,(x^2-z''x+1)=0.$$

En exécutant la multiplication, on a

$$x^4-(z+z')x^3+(z'z''+2)\,x^2+(z+z')\,x+1=0:$$

comparant les coefficiens, on a

$$z'+z''=-p\ldots z'z''=q-2,$$

donc z', et z'' sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2+p\,z+q-2=0\,(5).$$

Lorsqu'on connoîtra z', z'', on substituera leurs valeurs dans les deux facteurs

$$x^2-z'x+1=0,\ x^2-z''x+1=0:$$

ils donneront chacun deux racines, et on aura ainsi les quatre racines de la proposée.

Soit l'équation

$$x^6+p\,x^5+q\,x^4+r\,x^3+q\,x^2+p\,x+1=0:$$

on la mettra sous la forme suivante :

$$(x^2-z'x+1)\,(x^2-z''x+1)\,(x^2-z'''x+1)=0.$$

Multipliant et comparant les coefficiens des termes homologues, on a

$$z'+z''+z'''=-p\ldots$$
$$z'z''+z'z'''+z''z'''=q-3\ldots$$
$$z'z''z'''=-r-2p:$$

donc z', z'', z''' sont les racines de l'équation du troisième degré

$$z^3+pz^2+(q-3)z-(r+2p)=0\ldots$$

Soit encore l'équation réciproque du huitième degré

$$x^8+px^7+qx^6+rx^5+sx^4+rx^3+qx^2+px+1=0.$$

On pourra la mettre sous la forme

$$(x^2-z'x+1)(x^2-z''x+1)(x^2-z'''x+1(x^2-z''''x+1)=0:$$

multipliant et comparant les termes homologues, on aura

$$z'+z''+z'''+z''''=-p\ldots$$
$$z'z''+z'z'''+z'z''''+z''z'''+z''z''''+z'''z''''$$
$$=q-4\ldots z'z''z'''\ldots+z'z'''z''''+\ldots$$
$$=-(r+3p)\ldots z'z''z'''z''''=f-2q+2;$$

donc z', z'', z''', z'''', seront les racines de l'équation

$$z^4+pz^3+(q-4)z^2-(r+3p)z+f^2-2q+2=0:$$

enfin si on a une équation réciproque du degré $2n$

$$x^{2n}+px^{2n-1}+qx^{2n-2}+rx^{2n-3}+fx^{2n-4}+\ldots$$
$$+qx^{2n-2}+px^{2n-1}+1=0,$$

on la décomposera en un nombre n de facteurs doubles

$$(x^2-z'x+1)(x^2-z''x+1)(x^2-z'''x+1)(\ldots)(x^2-z^{(n)}x+1)=0.$$

Si on multiplie tous ces facteurs, et qu'on compare les coefficiens des différentes puissances de x avec ceux de la proposée, on aura

$$\Sigma.z'=-p\ldots\ \Sigma.z'z''=q-n\ldots$$
$$\Sigma.z'z''z'''=-(r+n-1.p)\ldots$$
$$\Sigma.z'z''z'''z''''=f-(n-2)q+\frac{n.n-3}{2}\ldots$$

et ainsi des autres coefficiens ; et si on désigne $\Sigma z'$ par $A \ldots \Sigma z'z''$ par $B \ldots \Sigma z'z''z'''$ par $C \ldots$ etc. on aura l'équation

$$z^n - A z^{n-1} + B z^{n-2} + C z^{n-3} + D z^{n-4} \ldots = 0.$$

Les n racines de cette équation, combinées avec les deux racines du facteur double

$$x^2 - z x + 1 = 0,$$

donneront les $2n$ racines de la proposée.

On voit ici la raison de ce qu'on a dit (43). En effet $x^{2k+1} - 1 = 0$, divisée par $x - 1$, donne pour quotient

$$x^{2k} + x^{2k-1} + x^{2k-2} + x^{2k-3} + \ldots + x + 1 = 0;$$

ce quotient égalé à zéro donne une équation réciproque du degré $2k$; on aura donc ses racines en résolvant une équation du degré k.

Soit pour exemple l'équation

$$x^5 - 1 = 0;$$

cette équation divisée par $x - 1$, donne pour quotient

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0:$$

celle-ci étant réciproque, ces racines dépendront de celles de la suivante :

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

savoir ;

$$z' = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \ldots z'' = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}:$$

substituant ces valeurs de z', z'', dans le facteur double

$$x^2 - z x + 1 = 0,$$

on a

$$x^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) x + 1 = 0 \ldots x^2 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) x + 1 = 0:$$

donc les quatre racines imaginaires de la proposée sont

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times \sqrt{-1}}{4} \ldots$$

$$x = \frac{-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times \sqrt{-1}}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times \sqrt{-1}}{4}$$

$$x = \frac{-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \times \sqrt{-1}}{4}.$$

Méthodes d'approximation pour la résolution des équations numériques.

63. Lorsque les racines de l'équation ne sont pas commensurables, ou lors même qu'étant commensurables, leur expression analytique est insuffisante pour faire connoître leurs valeurs numériques, comme dans le cas irréductible du troisième degré, on a recours aux méthodes d'approximation. La première qui se présente, consiste à mettre successivement pour x des nombres entiers pris, tant en plus qu'en moins, jusqu'à ce qu'on arrive à deux valeurs du premier membre, de signes contraires : quand on est parvenu, par des substitutions successives, à deux résultats de signes contraires, on est assuré qu'une des racines réelles de l'équation tombe entre les valeurs qui, substituées pour l'inconnue, ont produit deux résultats de signe différent (9).

Soit pour exemple l'équation

$$x^3 + 2x^2 + 3x - 50 = 0 \ldots$$

la supposition de $x = 2$ donne pour résultat -28... La supposition de $x = 3$ donne pour résultat $+4$: donc une des racines de l'équation est entre 2 et 3; et comme le second résultat $+4$ approche plus de zéro que le premier, on peut en conclure que la valeur de la racine approche plus de 2 que de 3; on pourra donc supposer $x = 2{,}5$, et chercher ensuite une plus grande approximation.

On fera $x = 2{,}5 + z$, z étant une petite fraction dont on pourra négliger le quarré, et les puissances supérieures: on aura donc

$$\begin{aligned} x^3 &= (2{,}5)^3 + 3(2{,}5)^2 z + \dots \\ +2x^2 &= 2(2{,}5)^2 + 4(2{,}5)z + \dots \\ +3x &= 3(2{,}5) + 3z. \\ -50 &= -50 \end{aligned}$$

ce qui donne, toute réduction faite, $31{,}75\, z = 14{,}375\dots$ donc $z = 0{,}45$ et par conséquent $x = 2{,}95$: si on substitue cette valeur dans l'équation proposée, on trouvera un résultat positif, ce qui annonce que la valeur assignée à x, est un peu trop forte: on fera de nouveau $x = 2{,}95 - z'$; on aura une seconde équation semblable à la précédente, qui donnera pour z' une très-petite valeur à retrancher de la première approximation: en continuant ainsi, on approchera aussi près qu'on voudra de la valeur de x.

64. La méthode dont nous venons de faire usage, est celle que Newton a donnée au commencement de sa méthode des fluxions: elle est dans presque tous les livres élémentaires: en l'approfondissant, on la trouve sujette à plusieurs imperfections; c'est pourquoi nous y substituerons celle de la Grange.

Considérons une équation quelconque du degré n, représentée par la formule générale

$$x^n + Px^{n-1} - + Qx^{n-2} + Rx^{n3} + \ldots + V = 0.$$

On peut la regarder comme le produit d'un certain nombre de racines positives, négatives, égales, réelles, imaginaires,

$$(x+a)(x+b)(x+c)^2(x-d)^2(x-g)(x-f) \times x^{2m} + px^{2m-4} + \ldots = 0;$$

si on met à la place de x un nombre positif quelconque, les facteurs $x+a$, $x+b$, resteront positifs : il en sera de même de chaque paire de racines égales, $(x+c)^2$, $(x-d)^2$, quel que soit leur signe : à l'égard des racines imaginaires, comme il est démontré (41) qu'elles sont toujours deux à deux, et de la forme $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, leur produit deux à deux sera $(x-a)^2+b^2$, quantité positive, quelle valeur qu'on donne à x : donc si on regarde l'équation proposée, comme le produit de trois facteurs $A \times B \times C$, dont le premier A soit le produit de toutes les racines négatives, le second B, le produit de toutes les racines égales en nombre pair, et des racines imaginaires, et le troisième C, soit le produit des racines positives inégales, la valeur des facteurs A, B, ne changera pas de signe, quelque nombre positif qu'on mette à la place de x : et elle demeurera toujours positive. Considérons donc le facteur C, que nous supposerons égal au produit de toutes les racines positives $(x-f)(x-g)(x-h)\ldots$.

Les quantités $f, g, h\ldots$ étant des quantités positives, telles que l'on ait $f < g, g < h\ldots$. Dans ce cas, si on met pour x un nombre plus petit que f, tous les facteurs de C seront négatifs ; mais C restera

positif, si le nombre des facteurs, dont il est composé, est pair; et il sera négatif, si le nombre des facteurs est impair. Si on met ensuite pour x une valeur $> f$ et $< g$, tous les facteurs de C seront encore négatifs, excepté le premier $x - f$, qui sera positif : donc le facteur C changera de signe, et la valeur de $A.B.C$ en changera aussi. Il est aisé de voir que le changement de signe aura lieu, toutes les fois que le nombre des facteurs qui changent de signe sera impair : ainsi si α, et β sont les deux valeurs de x qui rendent le facteur $x - f$ de signe différent, il faudra que l'on ait $\alpha > f$, et $\beta < f$, ou réciproquement : donc la racine f tombera nécessairement entre les deux nombres α et β..; mais si les deux valeurs α, β étoient telles que les deux racines f, g se trouvassent entre les deux suppositions, plus grandes que α, et plus petites que β, pour lors le nombre des facteurs qui changeroient de signe, seroit pair, et la valeur de $A\,B\,C$ conserveroit le même signe : donc si l'équation a des racines qui ne diffèrent pas entr'elles d'une unité, en substituant successivement pour x des nombres qui croissent de l'unité, les valeurs de f, g tomberont entre les deux substitutions, sans pouvoir être remarquées.

Pour ne laisser échapper aucune racine, et pour n'être pas obligé d'étendre à l'infini les substitutions, on commencera par chercher la limite de la plus grande racine positive (37) : soit cette limite $= L$, on fera ensuite $x = \frac{1}{z}$, on transformera ainsi l'équation en une autre, dont les plus grandes racines seront les plus petites de la transformée, et réciproquement : soit l cette limite ; $\frac{1}{l}$ sera celle de la plus petite racine de la proposée : ainsi les racines

réelles, positives de la proposée, seront entre les deux limites L, et $\frac{1}{l}$.

65. Maintenant si on forme la progression arithmétique $o.\ d.\ 2\ d.\ 3\ d.\ 4\ d.\ 5\ d.\ 6\ d...$ etc., telle que la différence d soit moindre que la plus petite différence entre deux racines consécutives, et qu'on ne prenne de cette progression, que les termes qui tomberont entre les limites $\frac{1}{l}$ et L, ces termes substitués dans l'équation à la place de x, donneront des résultats positifs ou négatifs, et le nombre des racines positives sera égal au nombre de fois que le facteur c changera de signe : cette méthode fera donc connoître les racines positives de l'équation, et donnera en même temps les premières limites de chaque racine.

Pour avoir la valeur de d, on formera l'équation aux quarrés des différences (32), on déterminera ensuite la limite de la plus petite racine de cette équation : soit k cette limite : et soient α et β les deux racines de la proposée, qui ont entr'elles la plus petite différence : on aura

$$k < (\alpha - \beta)^2,$$

et par conséquent

$$\alpha - \beta > \sqrt{k};$$

en faisant $d = \sqrt{k}$, ou en prenant pour d le plus grand nombre rationnel contenu dans cette racine ; on aura la différence qui doit régner dans la progression arithmétique.

Pour éclaircir ces principes par un exemple, soit l'équation

$$x^3 - 4x + 2 = 0:$$

il est visible que la plus grande racine positive de cette équation, ne peut pas dépasser 2 (38), et la plus petite ne peut pas être moindre que $\frac{1}{2} = 0,5...$ Si on forme l'équation aux quarrés des différences par la méthode du (n°. 32), on aura

$$y^3 - 24y^2 + 144y - 148 = 0,$$

en observant que $y = (\alpha - \beta)^2$: les signes de cette équation étant alternativement positifs et négatifs, il s'ensuit que l'équation aux quarrés des différences a ses trois racines positives, et que, par conséquent, la proposée n'a pas de racines imaginaires : ce qu'on sait d'ailleurs, puisqu'elle est dans le cas irréductible : faisons dans l'équation aux quarrés des différences $y = \frac{1}{z}$, on aura la transformée

$$x^3 - \frac{36}{37}x^2 + \frac{6z}{37} - \frac{a}{148} = 0..$$

La plus grande racine de cette équation ne peut pas dépasser $\frac{36}{37} + 1$, ou 2, et par conséquent la limite de la plus petite valeur de $(\alpha - \beta)^2 = 0,5$: donc celle de $\alpha - \beta = 0,7...$ on fera donc $d = 0,7$; et puisque 0,5 est une des limites des valeurs de x, on commencera la progression par 0,5 : on fera donc premièrement $x = 0,5$, on aura un résultat positif : si on fait $x = 0,5 + 0,7 = 1,2$, on aura un résultat négatif : donc la véritable valeur de x est entre 0,5, et 1,2 : si on continue de supposer pour x plusieurs valeurs croissant en progression arithmétique, dont la différence est 0,7, on trouvera, par la supposition de $x = 1,9$, un second résultat positif : donc la seconde racine positive est entre 1,2 ; et 1,9 ; on aura donc ainsi les premières

valeurs approchées des racines de l'équation : si on en veut de plus approchées, on les obtiendra par la méthode de Newton, en faisant $x=0,5+z$ (63) : mais il sera plus commode de se servir des fractions continues, parce que cette méthode n'exige pas qu'on ait la valeur de x, à un dixième près : il suffit de connoître les valeurs les plus approchées en nombres entiers.

66. Si on suppose que α et $\alpha + d$ sont deux nombres qui, substitués à la place de x dans l'équation proposée, donnent des résultats de signes contraires, d étant moindre que la plus petite différence entre les racines de l'équation, en faisant $x=\alpha+\frac{1}{y}$, on aura une transformée en y, dans laquelle il suffira de chercher la valeur entière la plus approchée de y : supposons que cette valeur approchée soit β, en sorte que la véritable valeur de y soit entre β et $\beta+1$; $>\beta$ et $<\beta+1$: on fera $y=\beta+\frac{1}{y'}$: et l'on formera ainsi une seconde transformée en y' : on cherchera de nouveau la valeur entière approchée de y'; et si on la représente par γ, on fera $y'=\gamma+\frac{1}{y''}$... en continuant ainsi, on aura l'équation $x=\alpha+\frac{1}{y'}, y=\beta+\frac{1}{y'}, y'=\gamma'+\frac{1}{y''}$... ce qui donnera pour la valeur approchée de x, la fraction continue

$$x=\alpha+\cfrac{1}{\beta+1\cfrac{}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+1\cfrac{}{y'''}}}}$$

Dans l'exemple déjà cité, $x^3 - 4x + 2 = 0$, en faisant $x = 0{,}5 + \frac{1}{y}$, on aura pour déterminer y, l'équation

$$y^3 - 26y^2 + 12y + 8 = 0;$$

on trouvera ensuite que la valeur de y est entre 25 et 26 : on fera donc $y = 25 + \frac{1}{y'}$ et l'on aura

$$x = 0{,}5 + \frac{1}{25 + \frac{1}{y'}} = 0{,}5 + \frac{1}{25},$$

si on néglige la valeur de $y' = 0,54\ldots$ à un centième près.

Soit proposée l'équation

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

qui a ses trois racines réelles : en faisant $x = 1$, la valeur de l'équation est -1 : lorsque $x = 2$ la valeur de l'équation est $+1$; donc x a une valeur comprise entre $+1$, et $+2$: si on fait $x = 1 + \frac{1}{y}$, on aura la transformée

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 :$$

en faisant $y = 1$ la valeur de la transformée $= -1$: si $y = 2$, la valeur de la transformée $= +7$, donc

$$y = 1 + \frac{1}{y'} ;$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on formera une seconde transformée

$$y'^3 - 3y'^2 - 4y' - 1 = 0 :$$

dans cette dernière équation, la valeur de y' sera comprise entre 4, et 5; on fera donc

$$y' = 4 + \frac{1.}{y''},$$

et l'on aura la troisième transformée

$$y''^{5} - 20y''^{4} - 9y'' + 1 = 0:$$

celle-ci aura une valeur réelle entre 20 et 21, on aura donc $y'' = 20 + \frac{1}{y'''}$: et ainsi de suite; donc

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{20 + \text{etc.}}}}$$

Si l'on forme les fractions partielles $\frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{9}{7}, \frac{184}{101} \ldots$ (*algeb.* 35), chacune de ces fractions sera une valeur approchée de la racine que l'on cherche: la dernière de ces fractions réduite en décimales, donne

$$x = 1,80198:$$

cette valeur est un peu plus forte que la véritable racine: en s'arrêtant à la fraction précédente, on auroit une valeur trop foible.

67. La méthode des fractions continues, a l'avantage de faire connoître les diviseurs commensurables du second degré de l'équation proposée, en vertu d'une propriété remarquable des équations du second degré, suivant laquelle les fractions continues qui expriment leurs racines, sont toujours périodiques. (*Voyez* la résolution des équations numériques par Lagrange, page 66. Essai sur la Théorie des Nombres, par Legendre, page 77 et suivantes.)

Supposons une équation dont la racine cherchée soit exprimée par $a + \frac{1}{y}$: supposons en second lieu que la racine de la transformée soit aussi $a + \frac{1}{y}$: on aura donc

$$x = a + \frac{1}{y}, \text{ et } y = a + \frac{1}{y}, \ldots$$

donc $1^{\circ}. x = y : 2^{\circ}. y^2 - a y - 1 = 0,$

ou $$x^2 - a x - 1 = 0.$$

La proposée devra donc être divisible par $x^2 - ax - 1$, et la transformée, par $y^2 - a y - 1 = 0$: elles auront donc deux racines communes contenues dans le facteur double,

$$x^2 - a x - 1 = 0,$$

lequel doit être, par conséquent, diviseur commun entre la transformée et la proposée.

Soit la proposée du second degré

$$x^2 - 2 x - 1 = 0,$$

dont une racine est entre 2 et 3, on fera

$$x = 2 + \frac{1}{y},$$

et la transformée sera

$$y^2 - 2 y - 1 = 0,$$

où l'on voit que la transformée étant la même que la proposée, donnera pour y une valeur entre 2 et 3, avec une seconde transformée

$$y'^2 - 2 y' - 1 = 0$$

égale à la première et à la proposée : la valeur de x

sera donc visiblement une fraction continue périodique, et l'on aura

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}$$

Soit l'équation

$$3x^2 - 6x - 2 = 0$$

dont une racine est entre 2 et 3 : on fera

$$x = 2 + \frac{1}{y},$$

et l'on aura la transformée

$$2y^2 - 6y - 3 = 0:$$

une des racines de y est entre 3 et 4 : on fera donc

$$y = 3 + \frac{1}{y'},$$

et l'on aura pour seconde transformée

$$3y'^2 - 6y' - 2 = 0;$$

or cette transformée est la même que la proposée, donc $y' = x$, et par conséquent

$$x = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}:$$

ce qui annonce une fraction périodique, dont la période commence à la seconde fraction.

Soit l'équation

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 16x - 5 = 0:$$

on trouvera d'abord qu'elle a une racine réelle entre

entre 3 et 4 : faisons $x = 3 + \frac{1}{y}$, on aura la transformée

$$17y^4 - 44y^3 - 37y^2 - 10y - 1 = 0 :$$

cette transformée a une racine entre 3 et 4, donc la valeur approchée de cette transformée, est la même que celle de la proposée ; et par conséquent dans la fraction continue qui doit donner la valeur approchée de la racine de la proposée, le nombre 3 se présente dans le même ordre : mais cela ne suffit pas pour être assuré que la fraction continue est périodique : il faut encore examiner si les valeurs complètes des racines des deux équations, qui ont la même valeur approchée, sont parfaitement les mêmes, ce que l'on connoîtra aisément en cherchant le plus grand commun diviseur entre les deux équations. Le diviseur doit contenir nécessairement toutes les racines communes aux deux équations, supposé qu'elles en aient : or en cherchant le commun diviseur entre la proposée et la transformée (dans laquelle on changera y en x), on trouvera qu'il est $x^2 - 3x - 1 = 0$: donc la transformée et la proposée ont deux racines communes, contenues dans le facteur double

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

Toutes les fois qu'une des transformées aura deux racines de communes avec la proposée, on pourra déterminer les diviseurs commensurables du second degré : l'équation proposée étant divisée par le facteur double $x^2 - 3x - 1$, donne pour quotient

$$x^2 + x + 5 :$$

donc elle pourra se mettre sous la forme suivante

$$(x^2 - 3x - 1)(x^2 + x + 5) = 0.$$

Cette méthode de trouver les facteurs doubles, est plus simple, à certains égards, que celle qu'on a vue (22).

68. Après avoir trouvé par approximation toutes les racines positives de l'équation, il sera aisé de trouver les négatives; on changera pour cela dans la proposée x en $-x$, et les racines positives seront changées en négatives, les négatives en positives (14); on cherchera donc les racines approchées de cette nouvelle transformée en suivant la méthode qui vient d'être expliquée, et les prenant avec le signe —, on aura les racines négatives de la proposée.

Soit l'équation

$$x^3 - 4x + 2 = 0 \quad (65);$$

en mettant $-x$ à la place de $+x$ elle devient

$$x^3 - 4x - 2 = 0:$$

celle-ci a une racine positive entre $x = 2$, et $x = 3$; donc la proposée a une racine négative entre $x = -2$, et $x = -3$. On cherchera ensuite la partie fractionnaire en faisant $x = 2 + \frac{1}{y}$.

69. Si la proposée a des racines égales en nombre pair, on cherchera le commun diviseur entre la proposée et l'équation $N = 0$ (27). Les racines qui étoient égales dans la proposée en nombre pair, se trouveront égales dans le commun diviseur en nombre impair (30); et si ces racines égales sont incommensurables, on cherchera les valeurs approchées des racines du commun diviseur, et l'on aura ainsi celles des racines égales de la proposée.

70. Quant aux racines imaginaires, on sait qu'elles sont de la forme

$$x = a \pm b\sqrt{-1},$$

substituant cette valeur de x dans l'équation à résoudre, et égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie multipliée par l'expression imaginaire $\sqrt{-1}$, l'on aura deux équations pour déterminer, soit rigoureusement, soit par approximation, les deux inconnues a et b.

Soit l'équation

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0 \quad (23);$$

en y substituant pour x, $a+b\sqrt{-1}$, égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on a les deux équations

$$a^4+4a^3+(6-6b^2)a^2+(4-12b^2)a+b^4-6b^2+5=0,$$
$$a^3+3a^2+(3-b^2)a+1-b^2=0;$$

on déduit de cette dernière

$$b^2=1+2a+a^2=(1+a)^2:$$

cette valeur substituée dans la première équation, donnera

$$4a^4+16a^3+24a^2+16a=0.$$

Cette équation a pour une de ses racines 0, et -2 pour une seconde racine; ces deux valeurs de a, substituées dans l'expression de b, donnent l'une et l'autre

$$b^2=1, \quad \text{ou } b=\pm 1:$$

ainsi

$$x=-2\pm\sqrt{-1}, \quad \text{et } x=\pm\sqrt{-1}.$$

Les deux premières valeurs de x, multipliées entr'elles, donnent

$$(x+2-\sqrt{-1})(x+2+\sqrt{-1})=x^2+4x+5.$$

les deux dernières donnent

$$(x-\sqrt{-1})(x+\sqrt{-1})=x^2+1.$$

ces deux facteurs doubles multipliés entr'eux donnent l'équation

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0,$$

comme on l'a déjà trouvé (23).

71. On peut aussi parvenir au même résultat par les considérations suivantes : le facteur double résultant du produit des deux racines imaginaires

$$x=a+b\sqrt{-1},\ x=a-b\sqrt{-1},$$

sera $x^2-2ax+a^2+b^2$.

L'équation proposée devant être divisible par ce facteur double, si on exécute la division, et qu'après l'avoir poussée aussi loin qu'il est possible, on ait un reste $Ax+B$, il faudra que ce reste soit zéro, indépendamment de la valeur de x : donc on aura

$$A=0\ldots B=0:$$

ces deux équations suffiront pour déterminer a et b.

Soit toujours la même équation

$$x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0;$$

en la divisant par $x^2-2ax+a^2+b^2$, on aura pour quotient

$$x^2+(4+2a)x+6+8a+3a^2-b^2.$$

et pour reste

$$(4+12a+12a^2+4a^3-4ab^2-4b^2)x$$
$$-(a^2+b^2)(6+8a+3a^2-b^2)+5:$$

on aura donc les deux équations

$$(1+a)^2=b^2,$$
$$(a^2+b^2)(6+8a+3a^2-b^2)+5=0.$$

La valeur de b^2 tirée de la première, étant substituée dans la seconde, donne

$$4a^4+16a^3+24a^2+16a=0,$$

d'où on déduira les mêmes valeurs a et b que ci-dessus.

Soit encore l'équation

$$x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0 :$$

en la divisant par $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$, on a pour quotient

$$x + 2a - 1,$$

et pour reste

$$(3 + 3a^2 - 2a - b^2)x + 5 - 2a^3 + a^2 + (1 - 2a)b^2.$$

ce qui donne les deux équations suivantes :

$$3 + 3a^2 - 2a - b^2 = 0,$$
$$5 - 2a^3 + a^2 + (1 - 2a)b^2 = 0.$$

Substituant dans la seconde la valeur de b^2 prise dans la première, elle se réduit à $1 - a^3 = 0$, c'est-à-dire $a = 1$: cette valeur de a, substituée dans la première, donne $b = 2$; donc le facteur double de l'équation proposée est

$$x^2 - 2x + 5,$$

ce qui donne $x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$ pour les deux racines imaginaires de l'équation proposée.

Lorsque l'équation dont on cherche les racines imaginaires est d'un degré plus élevé que le troisième ou le quatrième, les équations pour déterminer a et b sont, pour l'ordinaire, d'un degré si élevé, qu'elles ne peuvent être d'une grande utilité dans la pratique. On peut voir dans les ouvrages cités de Lagrange et de Legendre des méthodes très-ingénieuses pour avoir dans ces cas des valeurs approchées de a et b ; on y trouvera aussi plus de détail sur les méthodes d'approximation.

72. On peut aussi avoir les racines approchées des équations littérales en les réduisant en séries ;

Lagrange a donné une très-belle méthode pour avoir l'expression en série de chaque racine d'une équation proposée : cette méthode est de la plus grande utilité pour les questions qui dépendent du retour des suites ; on la trouvera dans les Mémoires de l'académie de Berlin (1767), dans la théorie des fonctions analytiques et dans la résolution des équations numériques.

Méthode d'élimination.

73. Les équations que nous avons considérées jusqu'ici ne renferment qu'une inconnue, et tout ce que nous avons dit sur la théorie générale des équations s'y applique sans restriction ; mais le plus souvent les applications de l'analyse à la résolution des problèmes offrent les inconnues mêlées ensemble dans les mêmes équations : on ne peut déterminer leurs valeurs particulières qu'après les avoir séparées, en éliminant des équations toutes les inconnues, à l'exception d'une seule.

Cette élimination est toujours facile dans les équations du premier degré. (*Algèb.* 79.) L'équation finale est pareillement du premier degré ; mais il n'en est pas ainsi des équations des degrés supérieurs : l'équation finale s'élève presque toujours à un degré beaucoup plus haut que les équations composantes, comme on le verra dans les articles suivans: commençons par les équations du premier degré.

Soient les deux équations

$$ax+by+c=0 \ldots mx+ny+p=0:$$

on multipliera l'une des deux ; la seconde, par exemple, par M, et l'ajoutant à la première, on aura

$$(a+Mm)x+(b+Mn)y+c+Mp=0.$$

Pour faire évanouir y de cette équation, on supposera son coefficient égal à zéro, on aura

$$b + Mn = 0 :$$

cette équation servira à déterminer M; on aura ensuite

$$x = -\left(\frac{c + Mp}{a + Mm}\right),$$

ou en mettant à la place de M sa valeur $-\frac{b}{n}$,

$$x = \frac{bp - cn}{an - bm} \cdots$$

Pour avoir la valeur de y, on fera le coefficient de x, $a + Mm = 0$, ce qui donnera $M = -\frac{a}{m}$, et par conséquent

$$y = \frac{cm - ap}{an - bm}.$$

Soient les trois équations

$$ax + by + cz + d = 0. \quad \ldots\ldots (1)$$
$$ex + fy + gz + h = 0. \quad \ldots\ldots (2)$$
$$ix + ky + lz + m = 0. \quad \ldots\ldots (3)$$

On multipliera la seconde par M, la troisième par N, et les ajoutant à la première, on aura

$$(a + Me + Ni)x + (b + Mf + Nk)y$$
$$+ (c + Mg + Nl)z + d + Mh + Nm = 0.$$

Pour avoir la valeur de x, on fera les coefficiens de y et $z = 0$; ce qui donnera deux équations pour déterminer M et N... Si on veut avoir la valeur

de y, on fera les coefficiens de x et $z = 0$; et pour connoître z, on les fera les coefficiens de x et $y = 0$. On aura donc ainsi les équations suivantes :

$$x = -\left(\frac{d+Mh+Nm}{a+Me+Ni}\right)\cdots$$

$$y = -\left(\frac{d+Mh+Nm}{b+Mf+Nk}\right)\cdots$$

$$z = -\left(\frac{d+Mh+Nm}{c+Mg+Nl}\right).$$

Les valeurs de M et N, trouvées par les deux équations

$$b+Mf+Nk = 0 \ldots c+Mg+Nl = 0,$$

étant substituées dans la valeur de x, elle deviendra

$$x = \frac{d(kg-fl)+h(bl-ck)+m(cf-bg)}{a(fl-kg)+e(ck-bl)+i(bg-cf)};$$

si on détermine les valeurs de M et N par les équations

$$a+Mc+Ni = 0 \ldots c+Mg+Nl = 0,$$

et qu'on les substitue dans la valeur de y, on aura

$$y = \frac{m(ag-ce)+h(ei-al)+d(el-ig)}{a(fl-kg)+e(ck-bl)+i(bg-cf)}.$$

Enfin si on détermine M et N par les équations

$$a+Mc+Ni = 0 \ldots b+Mf+Nk = 0,$$

et qu'on substitue ces valeurs dans le reste de l'équation, on aura

$$z = \frac{h(ak-bi)+d(fi-ck)+m(be-af)}{a(fk-kg)+e(ck-bl)+i(bg-cf)}.$$

Si les derniers termes de chaque équation d, h, m, étoient nuls, les numérateurs du second membre des équations précédentes seroient zéro : on se contenteroit dans ce cas de multiplier la première par f, et la seconde par b ; on retrancheroit la seconde ainsi multipliée de la première, et on en tireroit

$$\frac{x}{z} = \frac{bg - cf}{af - be} \cdots$$

multipliant la première par k, et la seconde par b, et les retranchant l'une de l'autre, on auroit

$$\frac{x}{z} = \frac{bl - ck}{ak - ib} :$$

pour que ces deux rapports de $\frac{x}{z}$ soient égaux, il faut que

$$(bg - cf)(ak - bi) = (bl - ck)(af - be),$$

ou que

$$a(fl - kg) + e(ck - bl) + i(bg - cf) = 0 ;$$

c'est-à-dire que lorsque les trois équations premières manquent de dernier terme, les expressions générales de x, y, z, sont indéterminées, et se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$; cette expression vague et indéterminée n'est point absurde, et nous donnerons dans la suite le moyen de la déterminer.

Si l'on avoit quatre, ou un plus grand nombre d'équations du premier degré, on détermineroit toujours les inconnues par la méthode qu'on vient de voir, et l'on parviendroit à des formules d'autant plus compliquées, que le nombre d'inconnues seroit plus considérable.

74. Proposons-nous maintenant de trouver l'é-

quation finale résultante de deux équations du second degré.

Soient les deux équations

$$x^2+axy+by^2+cx+dy+f=0,$$
$$x^2+mxy+ny^2+px+qy+r=0;$$

en les ordonnant par rapport à x, on peut les écrire sous la forme suivante :

$$x^2+(ay+c)x+(by^2+dy+f)=0,$$
$$x^2+(my+p)x+(ny^2+qy+r)=0;$$

et faisant pour abréger

$$ay+c=P\ldots by^2+dy+f=Q$$
$$my+p=P'\ldots ny^2+qy+r=Q':$$

les deux équations prendront la forme suivante :

$$x^2+Px+Q=0\ldots\ x^2+P'x+Q'=0\ldots$$

On se rappellera que P, P', Q, Q', sont fonction de y.

Le moyen le plus simple pour faire évanouir x de ces deux équations, consiste à retrancher d'abord la seconde de la première ; on aura ainsi

$$(P-P')x+Q-Q'=0:$$

multipliant la première par Q', et la seconde par Q, et les retranchant de nouveau, on a

$$(Q-Q')x+PQ'-P'Q=0.$$

On peut actuellement éliminer x au moyen de ces deux dernières équations, et l'on aura l'équation finale

$$(Q'-Q)^2+(P'-P)(P'Q-PQ')=0.$$

Cette équation est visiblement du quatrième degré

en y, parce que Q' et Q contenant y^2, leur quarré contiendra y^4.

75. On peut aussi parvenir au même but en multipliant chaque équation par un polynome contenant les deux indéterminées x et y; on ajoute ensuite les deux produits, et égalant à zéro le coefficient de chaque terme, on a autant d'équations que l'on a introduit de coefficiens indéterminés.

Multiplions donc la première des deux équations ci-dessus par $Ax+B$, et la seconde par $A'x+B'$: on aura, après avoir ordonné les termes

$$\begin{array}{llll} A.x^3+A\,P.x^2+A\,Q.x+BQ+B'Q'=0 \\ +A' & +A'P' & +A'Q' \\ & +B & +B\,P \\ & +B' & +B'P', \end{array}$$

on aura ensuite les équations

$$\begin{aligned} A+A'&=0\ldots \\ B\,Q+B'\,Q'&=0\ldots \\ AP+A'P'+B+B'&=0\ldots \\ AQ+A'Q'+BP+B'P'&=0\ldots \end{aligned}$$

on tire de la première $A=-A'\ldots$ et de la seconde $BQ=-B'Q'$.

Ces deux valeurs substituées dans les deux autres, on parviendra à l'équation finale déjà trouvée

$$(Q-Q')^2+(P'-P)\,(P'Q-PQ')=0:$$

si l'on avoit les deux équations du troisième degré

$x^3+Px^2+Qx+R=0\ldots\ x^3+P'x^2+Q'x+R'=0$,

Multipliant la première par le trinome Ax^2+Bx+c, la seconde par $A'x^2+B'x+c'$, et les ajoutant en-

suite, on aura une équation du cinquième degré; égalant à zéro les coefficiens de chaque terme, on formera autant d'équations qu'on a d'indéterminées. Si une des deux équations étoit du troisième degré, et l'autre du second, on multiplieroit la première par un facteur du premier degré, et la seconde par un facteur du second degré : ainsi

$$x^3+Px^2+Qx+R=0$$

seroit multipliée par $Ax+B$, et $x^2+P'xQ'$, par $A'x^2+B'x+C'$.

On peut encore se contenter de multiplier une des deux équations par un polynome contenant un nombre suffisant de coefficiens arbitraires, pour faire disparoître les termes affectés de x, en égalant à zéro le coefficient de chaque terme; mais comme par cette multiplication l'équation résultante montera à un plus haut degré, au moyen de la seconde équation, on éliminera du produit toutes les puissances de x égales, ou supérieures à celles de la première équation.

Soient les deux équations

$$x^3+Px^2+Qx+R=0 \ldots\ldots (1)$$
$$x^2+P'x\ Q'=0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Je multiplie la première par le trinome

$$Ax^2+Bx+C:$$

j'ai l'équation

$$\begin{array}{l} Ax^5+APx^4+AQx^3+ARx^2+BRx+CR=0 \\ \quad +B \quad +BP \quad +BQ \quad CQ \\ \qquad\quad +C \quad CP \end{array}$$

je la représente par

$$Fx^5+Gx^4+Hx^3+Kx^2+Lx+M=0 \quad (3)$$

multipliant l'équation (2) par Fx^3, et la retran-

chant de l'équation (3), on a une équation du quatrième degré représentée par

$$G'x^4 + H'x^3 + K'x^2 + L'x + M' = 0 \ldots (4)$$

multipliant de nouveau l'équation (2) par $G'x^2$, et la retranchant de l'équation (4), on a une équation du troisième degré, qu'on pourra abaisser au second, en suivant le même procédé : soit cette équation

$$K''x^2 + L''x + M'' = 0$$

dans laquelle K'', L'', M'' sont fonction de A, B, C; faisant

$$K'' = 0, L'' = 0, M'' = 0$$

et éliminant A, B, C, on aura une équation finale qui ne contiendra que $P, Q, R \ldots P', Q'$, et qui sera l'équation demandée.

76. On peut encore éliminer une des inconnues, par la méthode suivante qui dérive de la théorie des fonctions symétriques ou invariables.

Soient les deux équations du second degré

$$(1) \quad x^2 + Px + Q = 0 \ldots x^2 + P'x + Q = 0 \ldots (2)$$

Si on prend la valeur de x, dans une de ces équations, et qu'on la substitue dans l'autre, on aura une équation qui ne contiendra plus que y : mais comme chacune de ces équations a deux racines, en les substituant chacune séparément, on aura deux équations particulières délivrées de x : aucune de ces équations particulières ne sera l'équation générale qu'on cherche; mais cette dernière doit les comprendre toutes, et avoir lieu en même temps que chacune d'elles, condition qu'on remplira en les multipliant entr'elles, et égalant leur produit à zéro.

Soient donc les deux racines de l'équation (2) α, β :

les deux valeurs substituées à la place de x dans l'équation (1) donnent

$$\alpha^2 + P\alpha + Q = 0 \ldots \beta^2 + P\beta + Q = 0 \ldots$$

Leur produit sera

$$\alpha^2\beta^2 + P(\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2) + P^2\alpha\beta + Q(\alpha^2 + \beta^2) + PQ(\alpha + \beta) + Q^2 = 0$$

mais

$$\alpha^2\beta^2 = Q''^2 \ldots \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \Sigma\alpha^2\beta = -P'Q' \ldots \alpha^2 + \beta^2 = P^2 = 2Q \ldots \alpha + \beta = -P'$$

L'équation deviendra donc

$$Q'^2 - 2QQ' + Q^2 + P^2Q' - 2PP'Q + P'^2Q = 0,$$

ou plus simplement

$$(Q' - Q)^2 + (P - P')(PQ' - P'Q) = 0 \ldots (74)$$

Quand on aura obtenu une valeur de y, par la résolution de cette dernière équation, il faudra la substituer dans les équations (1) et (2), et il en résultera deux équations différentes, qui ne contenant plus que x, devront avoir au moins une racine commune : on cherchera donc le plus grand commun diviseur entre les deux équations, et en l'égalant à zéro, on aura toutes les valeurs de x, qui correspondent à une même valeur de y.

Ce que nous venons de dire, suffit pour donner une idée des différentes méthodes d'élimination : nous allons les traiter chacune séparément, en donnant plus de développement aux principes que nous avons posés.

77. Soient deux équations générales, contenant deux inconnues, la première du degré m, la seconde du degré n, m étant $> n$

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots + V = 0 \ldots (1)$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V' = 0 \ldots (2)$$

Il est clair, qu'au moyen de la seconde équation,

on pourra éliminer de la première, les puissances de x égales, ou supérieures à x^n, comme on l'a pratiqué (75): il suffit d'y substituer pour x^n, la valeur tirée de la seconde, ou de multiplier la seconde par x^{m-n}, et de la retrancher de la première : on continuera ces substitutions jusqu'à ce qu'on ait une équation qui ne renferme que des puissances de x inférieures à x^n : on formera ainsi une équation dans laquelle la plus haute puissance de x sera x^{n-1} : on éliminera de nouveau les puissances x^{n-1}, et l'on aura une équation dans laquelle la plus haute puissance sera x^{n-2} : en continuant ainsi, on parviendra à une équation indépendante de x, et qui sera l'équation finale en y. Avant de parvenir à cette équation finale, on en obtiendra une du premier degré en x, qui donnera la valeur de x en y; en sorte qu'ayant ensuite les différentes valeurs de y par la résolution de l'équation finale, on aura les valeurs correspondantes de x, sans être obligé de résoudre une nouvelle équation.

Cette méthode est générale, mais elle a l'inconvénient de conduire à une équation finale d'un degré plus élevé que le produit des exposans des plus hautes puissances des inconnues, lorsqu'il y en a plus de deux: soit en effet une équation en x, y, z, du degré m, une seconde équation du degré n, et une troisième du degré p. La première, combinée avec la seconde pour éliminer x, donnera une équation du degré (mn) : la première combinée avec la troisième pour éliminer x, donnera une équation du degré (mp): ces deux dernières équations combinées entr'elles, pour éliminer y, donneront une équation en z du degré (m^2np) : si on combinoit d'abord la seconde avec la première, et ensuite la troisième avec la seconde, pour éliminer x, les deux dernières, combinées entr'elles pour éli-

miner y, donneront une équation du degré (mn^2p); enfin si après avoir combiné la première avec la troisième, on combine la seconde avec la troisième pour éliminer x, et ensuite ces deux dernières pour éliminer y, il en résultera une équation du degré (mnp^2) : l'équation finale ne devroit être que du degré (mnp) : donc elle monte, par la méthode dont nous parlons, à un degré plus élevé que le produit des exposans des trois équations.

Soit la réduite du troisième degré

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \ldots\ldots\ldots (47)$$

dont on veut éliminer y au moyen de l'équation

$$y^2 - xy - \frac{p}{3} = 0 :$$

faisons, pour abréger $-\frac{p}{3} = K$... on tire de la seconde, en l'élevant au cube

$$y^6 = x^3y^3 + 3Kx^2y^2 + 3K^2xy + K^3 :$$

cette équation, retranchée de la première, donne pour reste

$$(x^3 + q)y^3 + 3kx^2y^2 + 3k^2xy = 0 :$$

ou, en divisant par y...

$$(x^3 + q)y^2 + 3kx^2y + 3k^2x = 0 :$$

Les deux derniers termes de cette équation peuvent se mettre sous la forme suivante

$$3kx(xy + k) = 3kx + y^2 :$$

toute l'équation pourra donc être divisée par y^2... et l'on aura pour quotient

$$x^3 + q + 3kx = 0, \quad \text{ou} \quad x^3 + px + q = 0.$$

78. On peut parvenir d'une manière plus simple, à

à une équation finale débarrassée de x, en faisant usage des théorêmes sur les fonctions symétriques.

Représentons les deux équations (1) et (2) par $M = 0, \ldots N = 0 \ldots$ Supposons, pour plus de généralité, que les équations sont à trois inconnues, et de la forme

$$M - z = 0, \quad N - z = 0 :$$

si on élimine x des deux équations, on aura une équation en z du degré m, qu'on pourra représenter par

$$z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3} \ldots + r = 0,$$

a, b, c étant fonction de y: pour que cette équation et les deux $M = 0 \ldots N = 0$ puissent subsister ensemble, il faudra faire $z = 0$; donc le dernier terme de l'équation sera zéro et par conséquent $r = 0$ sera l'équation débarrassée de x.

Si dans l'équation $M - z = 0$, on substitue successivement pour x les différentes racines de l'équation $N = 0$, que nous désignerons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ etc. et qui sont au nombre de n, on formera autant d'équations particulières

$$M' - z = 0 \ldots M'' - z = 0 \ldots M''' - z = 0 \ldots \text{ etc.}$$

que l'équation $N = 0$ a de racines, c'est-à-dire, un nombre n: donc l'équation résultante du produit de ces équations particulières, sera

$$(M' - z)(M'' - z)(M''' - z) \ldots = 0.$$

Mais, par la formation des équations, celle-ci aura pour dernier terme $M' M'' M''' \ldots$ etc.: donc $r = M' M'' M'''$; et par conséquent $r = 0$, ou l'équation finale débarrassée de x, sera le produit

des équations particulières

$$M' = \alpha^m + P\alpha^{m-1} + Q\alpha^{m-2} + R\alpha^{m-3} + \ldots + V = 0$$
$$M'' = \beta^m + P\beta^{m-1} + Q\beta^{m-2} + R\beta^{m-3} + \ldots + V = 0$$
$$M''' = \gamma^m + P\gamma^{m-1} + Q\gamma^{m-2} + R\gamma^{m-3} + \ldots + V = 0$$
$$M^{IV} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Le produit de toutes ces équations est tel que les coefficiens de l'équation $M = 0$, y forment partout des produits d'autant de dimensions qu'il y a d'équations particulières

$$M' = 0 \,.\, M'' = 0 \,.\, M''' = 0 ;$$

c'est-à-dire, que le produit est d'autant de dimensions qu'il y a de racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ dans l'équation $N = 0$; il en sera de même des coefficiens de l'équation $N = 0$, qui formeront dans l'équation finale, des produits d'autant de dimensions que l'équation $M = 0$ a de racines.

Tous les produits seront des fonctions invariables des racines des équations, et pourront s'exprimer rationnellement par les coefficiens des équations (1) et (2).

Il suit encore de la formation de l'équation résultante, que si les deux équations $M = 0 \,.\, N = 0$ ne renferment que deux inconnues x, y, l'équation finale doit être d'une dimension égale à la plus haute puissance de y dans le produit $M' M'' M''' \ldots$ Or chaque facteur M', M'', M''' contient des termes multipliés par y^m, et n'en contient pas de plus élevés; de plus il y a un nombre n de facteurs $M', M'', M''' \ldots$ donc l'équation finale ne pourra être que du degré mn.

Soient les deux équations ci-dessus :

$$y^6 + qy^3 - k^3 = 0$$
$$y^2 - xy - k = 0$$

Supposons que les deux racines de la seconde soient α, β; on formera les deux équations

$$M' = \alpha^6 + q\alpha^3 - k^3 = 0 \ldots \quad M'' = \beta^6 + q\beta^3 - k^3 = 0;$$

en les multipliant entr'elles, on formera l'équation finale

$$M'M'' = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha^6\beta^6 + q(\alpha^3\beta^6 + \alpha^6\beta^3) + q^2\alpha^3\beta^3 - k^3(\alpha^6 + \beta^6) - k^3q(\alpha^3 + \beta^3) + k^6 = 0;$$

or on a

1°. $\alpha^6\beta^6 = k^6$.

2°. $\alpha^3\beta^6 + \alpha^6\beta^3 = \Sigma\alpha^6\beta^3 = \alpha^3\beta^3(\beta^3 + \alpha^3) = -k^3 f_3$

3°. $\alpha^3\beta^3 = -k^3$.

4°. $\alpha^3 + \beta^3 = f_3$.

Faisant ces substitutions, et divisant par k^3, on aura, après avoir changé tous les signes,

$$q^2 + f_6 + 2qf_3 - 2k^3 = 0;$$

mais

$$f_6 = x^6 + 6kx^4 + 9k^2x^2 + 2k^3; \quad (25)$$

et

$$2qf_3 = 2q(x^3 + 3kx) \ldots$$

donc l'équation finale sera

$$x^6 + 6kx^4 + 2qx^3 + 9k^2x^2 + 6kqx + q^2 = 0.$$

ou

$$(x^3 + px + q)^2 = 0$$

d'où on déduit $x^3 + px + q = 0$, comme on l'a déjà trouvé (77.)

On voit, par cet exemple, que le produit $M'M''M'''\ldots$ peut toujours se former sans connoître les racines de l'équation (2), il suffit d'observer que les quantités $M', M'', M''' \ldots$ etc. sont des fonctions semblables des racines $\alpha, \beta, \delta \ldots$ et que par conséquent leur produit $M', M'', M''' \ldots$ est une fonction invariable des mêmes racines.

79. Il nous reste à parler de la méthode d'élimination que Bézout a exposée dans les Mémoires de l'académie des Sciences, 1764, dans ses Elémens d'Algèbre; et enfin dans sa Théorie générale des Equations algébriques : elle consiste à multiplier les équations proposées par un polynome qui soit fonction de toutes les inconnues qu'elles renferment, à faire une somme de tous ses produits, et à supposer dans cette somme que tous les termes affectés des inconnues qu'on veut éliminer sont zéro (75) : on peut aussi lorsqu'on n'a qu'une inconnue à faire évanouir, se contenter de multiplier la première des deux équations par un polynome en x et y d'un degré i; on élimine ensuite du produit, au moyen de la seconde équation, toutes les puissances de x égales ou supérieures à x^n (77).

Le polynome étant du degré i, le nombre de ses termes sera donné par la formule des nombres triangulaires $\frac{i+1.i+2}{2}$ (123), i étant $> n$.

80. Nous allons démontrer ici une proposition énoncée dans le Journal de l'Ecole Normale (tom. 3, page 28), savoir que le degré de l'équation finale doit être égal au produit des exposans qui désignent le degré des deux équations.

Puisque i est $> n$, on pourra supposer $i = i' + n$; si à l'aide de la seconde équation on fait évanouir dans le polynome multiplicateur les termes x^n et les puissances supérieures, le nombre des termes évanouissans sera

$$\frac{(i'+1)(i'+2)}{2},$$

et le nombre de ceux qui restent sera donc

$$\frac{(i'+n+1)(i'+n+2)}{2} - \frac{(i'+1)(i'+2)}{2}$$

$$= n\left(\frac{2i'+n+3}{2}\right),$$

et parce qu'on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité du calcul, que le premier terme de l'équation n'a d'autre coefficient que l'unité, le nombre des coefficiens arbitraires sera

$$n\left(\frac{2i'+n+3}{2}\right),$$

Lorsque l'équation du degré m aura été multipliée par ce polynome, le produit aura un nombre de termes représenté par

$$\frac{(i'+m+n+1)(i'+m+n+2)}{2};$$

le nombre des termes qu'on peut faire évanouir au moyen de l'équation du degré n sera

$$\frac{(i'+m+1)(i'+m+2)}{2};$$

donc le nombre des termes restans dans l'équation sera

$$n\left(m+\frac{2i'+n+3}{2}\right).$$

L'équation produite sera évidemment du degré $m+n+i'$, et le nombre des termes qui ne contiennent que la seule inconnue à conserver sera

$$m+n+i'+1:$$

si l'on retranche ce nombre du nombre total des termes restans $n\left(m+\frac{2i'+n+3}{2}\right)$, on aura le nombre des termes qui doivent servir à faire évanouir

l'autre inconnue ; ce nombre doit donc être égal au nombre des coefficiens arbitraires : on aura donc l'équation

$$n\left(\frac{2m+2i'+n+3}{2}\right)-(m+i'+n+1)$$
$$=n\left(\frac{2i'+n+3}{2}\right)-1.$$

d'où on déduit

$$m+n+i'=mn;$$

c'est-à-dire que le degré de l'équation finale doit être égal au produit des dimensions des deux équations premières (1) et (2).

81. On peut généraliser cette démonstration, et prouver que si l'on a un nombre quelconque d'équations entre un égal nombre d'inconnues, le degré de l'équation finale résultante de l'élimination de toutes les inconnues, à l'exception d'une seule, est égal au produit des exposans marquant le degré des équations ; ce théorême se trouve dans l'ouvrage de Bézout, sur la résolution des équations. La démonstration qu'il en donne est déduite du calcul des différences finies. Nous pourrions la déduire du principe des combinaisons et de la formation des équations ; mais ce détail nous mèneroit trop loin.

Du développement en série des fonctions algébriques.

82. Si l'on a une expression quelconque rationnelle et entière, composée de quantités constantes $a, b, c...$ et des différentes puissances de la variable x, et qu'on suppose ensuite que x reçoive un accroissement indéterminé représenté par k,

l'expression première changera de valeur et se développera en une suite finie de termes croissans toujours selon les puissances de k.

83. Si l'expression est fractionnaire ou irrationnelle, on a vu (*Algèb.* 64.) qu'elle se développe en une suite infinie de termes croissans pareillement selon les puissances de k.

Quelle que soit la forme de la fonction donnée, que nous appellerons *fonction primitive*, on peut la représenter par $\varphi.x$; et lorsque x deviendra $x+k$, la fonction sera représentée par $\varphi(x+k)$.

Il suit de ce que nous venons de dire, que le développement de cette fonction pourra être représenté par la formule suivante :

$$\varphi(x+k) = A + Bk + Ck^2 + Dk^3 + Fk^4 + \ldots \text{ etc.}$$

dans laquelle $A, B, C, D \ldots$ etc. sont des quantités dépendantes de x, et des constantes renfermées dans la fonction, mais indépendantes de k.

84. Si la fonction primitive est entière et rationnelle, elle ne contiendra que des puissances entières de x, et ne pourra être que de la forme suivante :

$$\varphi x = Mx^m + Nx^n + Px^p + \ldots$$

m, n, p étant des nombres entiers positifs ; et par conséquent $\varphi(x+k)$ sera représenté par

$$M(x+k)^m + N(x+k)^n + P(x+k)^p + \ldots$$

85. Jusqu'ici nous ne connoissons la loi du développement de ces binomes que par analogie (*Algèb.* 57) ; et comme le binome sert lui-même au développement des autres fonctions, et qu'on le retrouve dans toutes les parties des mathématiques, il importe d'en avoir une démonstration rigoureuse, qui soit exempte de toute supposition et indépendante de tout principe étranger.

86. Il est facile de s'assurer par la nature de l'exaltation que le développement des premières puissances de $1+x$ est comme il suit :

$$(1+x)^1 = 1+x$$
$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2$$
$$(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$$
$$(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$
$$\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

La loi de l'analogie permet de supposer généralement que

$$(1+x)^n = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\ldots$$

Cette supposition deviendra une vérité mathématique, si l'on observe 1°. que le développement du binome $(1+x)^n$ ne peut pas contenir de puissance négative de x; car la forme générale de la série doit être telle qu'elle convienne au développement du binome, quelle que soit la valeur de x: or il est évident que si elle contenoit un terme de la forme $\frac{M}{x^k}$, en faisant $x=0$, ce terme deviendroit infini, tandis que le premier membre de l'équation se réduiroit à 1; on auroit donc $1=x$, ce qui seroit absurde : 2°. le développement ne peut pas contenir de puissance fractionnaire de x tant que x sera une quantité rationnelle; car on sait par les règles de l'analyse que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons avec les différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme : donc si le développement de $(1+x)^n$ contenoit un terme de la forme $Nx^{\frac{r}{s}}$, il y auroit un nombre s de valeurs différentes pour chaque valeur particulière de x, tan-

dis que le premier membre du développement n'en auroit qu'une, ce qui seroit absurde : donc la forme générale qu'on a supposée au développement de $(1+x)^n$ est la seule qui puisse lui convenir : cela posé si

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Fx^5 + \ldots$$

on aura

$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + D'x^4 + F'x^5 \ldots$$

mais on a aussi

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \times (1+x)$$
$$= 1 + A.x + B.x^2 + C.x^3 + D.x^4 + F.x^5$$
$$+ 1 + A. + B. + C. + D. + \ldots$$

Comparant les deux valeurs, de $(1+x)^{n+1}$, terme à terme, on a $A' = A + 1$: ce résultat nous apprend que lorsque l'exposant de $(1+x)^n$ augmente d'une unité, le coefficient du second terme augmente aussi d'une unité : il suffit donc de connoître la valeur de ce coefficient pour une valeur particulière de n, pour la connoître ensuite généralement : or on sait que la valeur de ce coefficient est 1 pour la première puissance, c'est-à-dire, lorsque $n=1$, donc elle sera 2 lorsque $n=2$, elle sera 3 lorsque $n=3$, elle sera 4 lorsque $n=4$; en un mot le coefficient du second terme du développement du binome $(1+x)^n$, sera égal à l'exposant même de la puissance.

Soit à présent $(x+k)^n$, qu'on peut mettre sous cette forme

$$x^n\left(1+\frac{k}{x}\right)^n$$
$$= x^n\left(1 + A\frac{k}{x} + B\frac{k^2}{x^2} + C\frac{k^3}{x^3} + D\frac{k^4}{x^4} + \ldots\right)$$
$$= x^n + Ax^{n-1}k + Bx^{n-2}k^2 + Cx^{n-3}k^3 + Dx^{n-4}k^4 + \text{, etc.}$$

Cette équation doit se vérifier indépendamment de toute valeur particulière de x et de k, lorsque les coefficiens A, B, C, D auront été déterminés d'une manière convenable.

Supposons que la variable x devienne $x+l$, on aura

$$(x+l+k)^n=(x+l)^n+Ak(x+l)^{n-1}+Bk^2(x+l)^{n-2}+Ck^3(x+l)^{n-3}+Dk^4(x+l)^{n-4}+\ldots\ldots(1)$$

mais au lieu de supposer que x augmente de l, on peut supposer que c'est la quantité k qui devient $k+l$: on aura pour lors

$$(x+k+l)^n=x^n+Ax^{n-1}(k+l)+Bx^{n-2}(k+l)^2+Cx^{n-3}(k+l)^3+Dx^{n-4}(k+l)^4+\ldots(2)$$

or les deux premiers membres de ces développemens sont identiques ; donc les seconds membres doivent aussi être identiques, indépendamment des valeurs de x, k, l. En développant les puissances de $x+l$ et $k+l$, on n'écrira, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance ; parce que la comparaison de ces termes suffit pour déterminer les coefficiens $A, B, C, D\ldots$ et que ces coefficieas étant déterminés, les autres termes du développement se détruisent mutuellement, comme on peut s'en convaincre directement.

Le développement de la série (1) donnera, en s'en tenant aux premiers termes, $(x+l+k)^n$

$$=x^n+Ak.x^{n-1}+Bk^2x^{n-2}+Ck^3x^{n-3}+Dk^4x^{n-4}+\ldots$$
$$+Al.+{}'A.Akl.+{}''ABk^2l.+{}'''ACk^3l.+\ldots$$

${}'A, {}''A, {}'''A, \ldots$ etc. sont les coefficiens des seconds termes du développement de

$$(x+l)^{n-1}, (x+l)^{n-2}, (x+l)^{n-3}, \ldots \text{ etc.}$$

Le développement de la série (2) donnera

$$(x+k+l)^n$$
$$=x^n+Ak.x^{n-1}+Bk^2x^{n-2}+Ck^3x^{n-3}+Dk^4x^{n-4}+\ldots$$
$$+Al. \quad +2Bkl. \quad +3Ck^2l. \quad +4Dk^3l. \quad +\ldots$$

Comparant les termes des deux développemens affectés des mêmes facteurs l, kl, k^2l, k^3l... etc. on aura

$$A=A\ldots 2B='AA=A.A-1,$$

$$3C={}^{n}AB=\overline{A-2}.B=\frac{A.A-1A-2}{2}\ldots$$

$$4D={}'''AC=A-3.C=\frac{A.A-1.A-2A-3}{2.3}\ldots$$

donc lorsqu'on connoîtra A, on connoîtra facilement les autres coefficiens : or on vient de voir que $A=n$, et par conséquent

$$'A=n-1,\ {}^{n}A=n-2.$$

donc
$$B=\frac{n.n-1}{2}.$$

$$C=\frac{n.n-1.n-2}{2.3}.$$

$$D=\frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4.},$$

et ainsi des autres coefficiens.

Il suit, de la loi observée dans le développement, que chaque terme dépend de celui qui le précède, et que lorsqu'on connoît le second, on peut trouver tous les autres.

87. Cette démonstration suppose que l'exposant n est un nombre entier positif : nous allons dé-

montrer que la loi du développement est la même, lorsque l'exposant est fractionnaire.

Puisqu'on connoît la loi du développement du binome $(1+x)^n$ lorsque n est un nombre entier, et qu'on sait que tous les termes sont des fonctions déterminées et connues de n, on pourra regarder la somme de tous les termes du développement, comme une fonction connue de n, et la représenter par $\varphi.n$. Par la même raison, le même binome élevé à la puissance p, pourra être représenté par $\varphi.p$. Le signe φ est employé ici pour désigner une fonction dont la forme est connue: ainsi toutes les fois que la forme sera la même, on la représentera par le même signe : on aura donc

$$(1+x)^n = \varphi.n$$
$$(1+x)^p = \varphi.p$$
$$(1+x)^r = \varphi.r$$
$$(1+x)^s = \varphi.s$$
$$\ldots\ldots = \ldots$$

multipliant tous les binomes entr'eux, il en résulte

$$(1+x)^{n+p+r+s\ldots} = \varphi.n \times \varphi.p \times \varphi.r \times \varphi.s$$
$$= \varphi(n+p+r+s).$$

si l'on suppose $n=p=r=s=\ldots$ et qu'on y ait un nombre m de pareils binomes, on aura

$$(1+x)^{mn} = (\varphi.n)^m = \varphi(mn)$$

Soit $mn=q$; on aura donc

$$n=\frac{q}{m}, \text{ et } \varphi.q=\left(\varphi.\frac{q}{m}\right)^m \ldots \text{ ou } \varphi.\frac{q}{m}=(\varphi.q)^{\frac{1}{m}};$$

extrayant la racine k, on aura

$$\left(\varphi.\frac{q}{m}\right)^{\frac{1}{k}} = (\varphi.q)^{\frac{1}{mk}};$$

or mk est toujours un entier qu'on peut représenter par u, parce que m est un entier aussi bien que k; on aura donc

$$(\varphi.q)^{\frac{1}{u}} = \varphi.\frac{q}{u},$$

puisqu'on a

$$(\varphi q)^{\frac{n}{m}} = \varphi.\frac{q}{m};$$

si on suppose que mk ou u est $> q$, ce qui est toujours permis à cause de l'indéterminée k, $\frac{q}{u}$ sera nécessairement un nombre fractionnaire; mais $\varphi.q$ désigne $(1+x)^q$, $\varphi(q)^{\frac{1}{u}}$ désigne $(1+x)^{\frac{q}{u}}$ et $\varphi\left(\frac{q}{u}\right)$ désigne une fonction de $\frac{q}{u}$ semblable à celle qui a été désignée par $\varphi.n$; donc le développement de $(1+x)^{\frac{q}{u}}$ sera absolument semblable à celui de $(1+x)^n$; c'est-à-dire que

$$(1+x)^{\frac{q}{u}} = 1 + \frac{q}{u}x + \frac{\frac{q}{u}.\frac{q}{u}}{2}x^2 + \ldots \text{etc.}$$

Ainsi la formule du binome est applicable au cas où l'exposant est fractionnaire.

88. Si l'exposant est négatif, on a

$$\frac{(1+x)^p}{(1+x)^r} = (1+x)^p \times (1+x)^{-r} = (1+x)^{p-r} = \varphi(p-r);$$

mais d'un autre côté

$$\frac{(1+x)^p}{(1+x)^r} = \frac{\varphi.p}{\varphi.r} = \varphi.p \times \varphi(.r)^{-1}.$$

on a donc

$$\varphi(p-r) = p \times \varphi(r)^{-1}.$$

Cette forme est indépendante de la valeur de p et r; elle aura donc lieu lors même que $p = 0$: mais dans cette hypothèse on a $\varphi.p = 1$, donc

$$\varphi(-r) = (\varphi.r)^{-1} = \frac{1}{\varphi.r},$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{(1+x)^r}$ donnera pour développement une fonction de $-r$ semblable à celle de $\varphi.n$: on aura donc

$$(1+x)^{-r} = 1 - rx + \frac{r.r+1}{2}x^2 - \ldots \text{etc.}$$

Ainsi la loi du développement du binome, lorsque l'exposant est négatif, est la même que pour un exposant positif entier ou fractionnaire; on verra (120) qu'elle a également lieu lorsque l'exposant est incommensurable ou imaginaire.

La démonstration qu'on vient de voir du développement en série du binome $(1+x)^n$, ou plutôt d'un binome quelconque $(x+k)^n$, est un cas particulier de la théorie générale des développemens: nous allons donc l'appliquer à une fonction quelconque.

89. Soit une fonction quelconque de x, déterminée ou indéterminée, représentée par $F.x$: si on suppose que x reçoive un accroissement k, la fonction deviendra $F(x+k)$, et l'on prouvera, comme dans l'exemple précédent, que le développement en série ne peut contenir que les puissances entières et positives de k: on aura donc

$$F(x+k) = X + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 + X_4 k^4 \ldots$$

Les coefficiens X_1, X_2, X_3, X_4... sont des

fonctions de x indépendantes de k, qui dérivent de la fonction proposée, en suivant une loi que nous ne tarderons pas à connoître.

On voit d'abord que si $k=0$ on a $X=F.x$, donc le premier terme du développement, qui est indépendant de k, est égal à la fonction proposée que nous avons déjà nommée fonction primitive (83). Supposons que k augmente de la quantité l, on aura

$$F(x+k+l)=F.x+X_1(k+l)+X_2(k+l)^2 + X_3(k+l)^3+X_4(k+l)^4+\ldots\ldots(1)$$

Supposons en second lieu que x reçoive un accroissement représenté par l; $F(x+k)$ deviendra

$$F(x+l+k);$$

Substituant $x+l$ à la place de x dans chaque terme du développement,

Le premier, Fx deviendra

$$Fx+X_1 l+X_2 l^2+X_3 l_3+X_4 l_4\ldots$$

Le coefficient X_1 deviendra

$$X_1+X'_1 l+X''_1 l^2+X'''_1 l^3+X^{IV}_1 l^4\ldots$$

Le coefficient X_2 deviendra

$$X_2+X'_2 l+X''_2 l^2+X'''_2 l^3+X^{IV}_2 l^4\ldots$$

Le coefficient X_3 deviendra

$$X_3+X'_3 l+X''_3 l^2+X'''_3 l^3+X^{IV}_3 l^4\ldots$$

Le coefficient X_4 deviendra

$$X_4+X'_4 l+X''_4 l^2+X'''_4 l^3+X^{IV}_4 l^4\ldots$$

donc en ne développant chaque coefficient que jusqu'au second terme, ce qui suffit pour déterminer la loi du développement, on aura

$$F(x+l+k)$$
$$=Fx+X_1 k+X_2 k^2+X_3 k^3+X_4 k^4\ldots\ldots$$
$$+X'l+X'_1 kl+X'_2 k^2 l+X'_3 k^3 l+X'_4 k^4 l\ldots\ldots(2)$$

La série (1) développée, donne pour premiers termes

$$F(x+k+l) = Fx + X_1 k + X_2 k^2 + X_3 k^3 X_4 k^4 + \dots$$
$$+ X_1 l + 2X_2 k l + 3X_3 k^2 l + 4X_4 k^3 l + \dots$$

Ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de k, l; donc on aura, en égalant les coefficiens des mêmes puissances de $k, k\,l, k^2 l \dots$ etc.

$$X_1 = X_1 \dots 2X_2 = X'_1 \dots 3X_3 = X'_2 \dots 4X_4 = X'_3 \dots \text{etc.}$$

où l'on voit, 1°. que le coefficient X_1 du second terme du développement reste indéterminé ; 2°. que le coefficient X_2 du troisième terme du développement est égal à la moitié du coefficient du second terme du développement de X_1, si on y substitue $x+k$ à la place de x; 3°. le coefficient du quatrième terme du développement de $F(x+k)$ est égal au tiers du coefficient du second terme du développement de X_2, lorsqu'on y substitue $x+k$ à la place de x; et ainsi des autres.

Puisque X_1 reste indéterminé dans le développement ci-dessus, il faudra le déterminer par quelqu'autre moyen: quelle que soit sa valeur, on peut la représenter par $F'.x$. Ce signe représentera une fonction de x dérivée de la fonction primitive, lorsqu'on y suppose que x devient $x+k$: on écrira donc

$$X_1 = F'.x.$$

X'_1 sera le coefficient du second terme du développement de $F'(x+k)$: représentons ce coefficient par $F''.x$, ce signe représentera une fonction de x dérivée de $F'x$ par la même loi que $F'x$ est dérivée de Fx; on aura donc

$$X_2 = \frac{F''x}{2}.$$

X'_2

X', sera le coefficient du second terme du développement de $\frac{F''(x+k)}{2}$, et si on représente ce coefficient par $\frac{F'''.x}{2}$, on aura

$$X_3 = \frac{F'''.x}{2.3}$$

et ainsi des autres : substituant donc ces expressions, on aura

$$F'(x+k) = Fx + F'x + \frac{k^2}{2}F''.x + \frac{k^3}{2.3}F'''.x + \frac{k^4}{2.3.4}F''''.x + \text{...etc.}$$

90. En résumant tout ce que nous venons de dire sur la formation des coefficiens, on voit 1°. que $F'x$ est le coefficient du second terme du développement de $F(x+k)$; 2°. que $F''.x$ est le coefficient du second terme du développement de $F'(x+k)$; 3°. que $F'''.x$ est le coefficient du second terme du développement de $F''(x+k)$. Donc quand on aura déterminé $F'x$, il sera aisé de déterminer les autres, parce qu'ils dérivent tous les uns des autres en suivant une même loi.

Ces coefficiens des différentes puissances de k, sont de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction proposée Fx, et indépendantes de k; on les nomme pour cette raison, *fonctions dérivées*, et on les distingue en fonctions primes, $F'.x$, fonctions secondes, $F''.x$, fonctions tierces, $F'''.x$. la fonction proposée étant la fonction primitive.

Soit $Fx = x^m$: en substituant $x+k$ à la place de x dans Fx, et développant jusqu'au second terme, on a

$$F'x = mx^{m-1} :$$

pour avoir $F''x$, on substituera $x+k$ à la place de x dans $F'.x$, et l'on aura

$$m.(x+k)^{m-1};$$

et développant jusqu'au second terme, on a

$$F''.x = m.m-1\,x^{m-2}.$$

Pour avoir $F'''x$, on substituera $x+k$ à la place de x dans $F''.x$, et l'on aura

$$m.m-1\,(x+k)^{m-2};$$

et développant jusqu'au second terme, on a

$$F'''.x = m.m-1.m-2.x^{m-3}$$

on aura donc

$$(x+k)^m = x^m + m\,x^{m-1}.k + \frac{m.m-1}{2}x^{m-2}k^2$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2.3}x^{m-3}k^3+\ldots \text{ etc.}$$

Pour que la formule générale du développement puisse être de quelqu'utilité, il faut que les séries qu'elle donne soient convergentes : or nous allons démontrer que l'on peut toujours donner à k une valeur assez petite pour que chaque terme du développement soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.

91. Supposons que l'on ait une série représentée par

$$Y = y + Ak + Bk^2 + Ck^3 + Dk^4 + \ldots\ldots \text{ etc. (1)}$$

Soit k une fraction représentée par $\frac{1}{m}$, on aura donc

$$Y - y = \frac{A}{m} + \frac{B}{m^2} + \frac{C}{m^3} + \frac{D}{m^4} + \ldots + \frac{V}{m^n},$$

a représentant un nombre aussi grand qu'on voudra, on pourra mettre cette série sous la forme suivante :

$$A\left\{m^{-1}+\frac{B}{A}m^{-2}+\frac{C}{A}m^{-3}+\frac{D}{A}m^{-4}+\ldots+\frac{V}{A}m^{-n}.\right\}$$

Soit R, le plus grand de tous les coefficiens de la série : si on fait $m=\frac{R}{A}+1$, on aura

$$m^{-1}=\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-1}=\frac{R}{A}\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-2}+\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-2}$$

$$=\frac{R}{A}\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-2}+\frac{R}{A}\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-3}+\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-3}$$

$$=\frac{R}{A}\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-2}+\frac{R}{A}\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-3}$$

$$+\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-4}+\frac{R}{A}\left(\frac{R+A}{A}\right)^{-5}+\ldots \text{ etc.}$$

En continuant de développer ainsi la valeur de m^{-1}, et la substituant, on verra aisément que le premier terme de la série proposée est plus grand que la somme de tous les autres ; si on applique le même développement à tous les termes de la série (1), en faisant attention que $k=\frac{1}{m}=\frac{A}{R+A}$, chaque terme sera plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent, parce que l'on a par hypothèse $R>$ que chacun des autres coefficiens : donc tant que R sera une quantité finie, il sera possible de donner à k une valeur assez petite pour que chaque terme soit plus grand que la somme de ceux qui le suivent : on pourra donc obtenir des séries aussi convergentes qu'on voudra.

Le théorême général sur le développement des fonctions en séries est dû à Lagrange, qui l'a donné, pour la première fois, dans les Mémoires de l'académie de Berlin, et plus récemment dans sa théorie des fonctions analytiques. Comme il est de la plus grande importance, sur-tout dans la théorie des lignes courbes, il importe de se le rendre familier.

92. On peut donner à la formule du développement une forme plus simple, et souvent plus commode; si on représente Fx par y, on pourra désigner $F.x$ par y', $F''.x$ par y'', $F'''.x$ par y'''... etc. et représentant $F(x+k)$ par Y, on écrira

$$Y = y + ky' + \frac{k^2}{2}y'' + \frac{k^3}{2.3}y''' + \frac{k^4}{2.3.4}y'' + \ldots$$

Soit $y = \frac{1}{x}$; pour avoir y', il faudra développer $(x+k)^{-1}$ jusqu'au second terme, et l'on aura

$$y' = -\frac{1}{x^2}.$$

Pour avoir y'', il faut substituer $x+k$ à la place de x dans $-\frac{1}{x^2}$, et développer jusqu'au second terme, on trouvera

$$y'' = \frac{2}{x^3}.$$

en suivant le même procédé, on trouvera

$$y''' = -\frac{6}{x^4}.$$

et ainsi des autres termes: on aura donc

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^3} - \frac{k^3}{x^4} + \ldots \text{ etc.}$$

Soit $y=\sqrt{ax}$, ou $\sqrt{a}\times x^{\frac{1}{2}}$, pour déterminer y', on aura $(x+k)^{\frac{1}{2}}$, qu'il s'agit de développer jusqu'au second terme, on trouvera $\frac{1}{2}\frac{k}{\sqrt{x}}$;

donc $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Pour déterminer y'', on substituera $x+k$ à la place de x dans $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, on développera jusqu'au second terme, et on trouvera

$$y''=-\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}},$$

on aura donc pour les premiers termes du développement de $\sqrt{a(x+k)}$,

$$\sqrt{a}\left\{\sqrt{x}+\frac{k}{2\sqrt{x}}-\frac{k^2}{8\sqrt{x^3}}+\ldots\right\}$$

93. Représentons par X une fonction déterminée et connue de x, et cherchons l'expression des fonctions dérivées de $F.X$.

Si x reçoit un accroissement, représenté par k, X se développera selon les puissances entières de k, et l'on aura pour développement de X

$$X+X'k+X''k^2+\ldots\ (89)$$

Pour avoir la valeur de la fonction prime de $F.X$, il faudra s'arrêter dans le développement, à la première puissance de k : on substituera donc dans $F.X$, $X+X'k$ à la place de X, et l'on dé-

veloppera jusqu'au second terme : on aura ainsi

$$F(X+X'k)=FX+X'kF'X:$$

donc le coefficient de k, ou la fonction prime de $F.X=X'F'.X$. Pour avoir la fonction seconde de FX, on substituera $x+k$ à la place de x dans $X'F.X$, et négligeant les secondes puissances de k, et les puissances supérieures, on développera jusqu'au second terme.

Soit $F.X=(a+bx^m)^p$; on a ici

$$X=a+bx^m, F.X=X^p\ldots X'=mbx^{m-1}\ldots$$
$$F'X=pX^{p-1}=p(a+bx^m)^{p-1}.$$

donc $$X'F'.X=mbpx^{m-1}(a+bx^m)^{p-1}$$

Soit $$F.X=\sqrt{px\pm\frac{px^2}{2a}}$$

$$=\sqrt{\frac{p}{2a}}\sqrt{2ax\pm x^2}$$

on a ici $X=2ax\pm x^2, F.X=X^{\frac{1}{2}}$,

$$=(2ax\pm x^2)^{\frac{1}{2}}\ldots X'=2a\pm 2x\ldots,$$

$$F'X=\frac{1}{2}X^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2ax\pm x^2}}\ldots$$

donc $$X'F'.X=\sqrt{\frac{p}{2a}}\times\frac{a\pm x}{\sqrt{2ax\pm x^2}}$$

$$=\frac{p\pm\frac{px}{a}}{2\sqrt{px\pm\frac{px^2}{2a}}}$$

Pour avoir $F'.x$, on substituera $x + k$ à la place de x dans l'expression de X' F' X, on négligera toutes les puissances de k, supérieures à la première, et on développera ensuite jusqu'au second terme : on aura ainsi

$$\sqrt{\frac{p}{2a}} \times \left\{ \overline{a \pm x \pm k} \times 2ax \pm x^2 + 2\overline{a \pm x}k \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{2a}} \times \overline{a \pm x \pm k}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{2ax \pm x^2}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{\overline{2a \pm 2x}k}{(2ax \pm x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{p}{2a}} \times \left(\pm \frac{1}{(2ax \pm x^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{(a \pm x)^2}{(2ax \pm x^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \times k$$

donc la fonction seconde de FX

$= \sqrt{px \pm \frac{px^2}{2a}}$ sera

$$\sqrt{\frac{p}{2a}} \times -\frac{a^2}{(2ax \pm x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{p^2}{4(px \pm \frac{px^2}{2a})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-p^2}{4y^3}.$$

Soit encore la fonction

$$\sqrt{R^2 - (x-p)^2} = FX;$$

on a ici

$$X = R^2 - (x-p)^2 \ldots FX = X^{\frac{1}{2}} \ldots$$

$$X' = -2(x-p) \ldots F'X = \frac{1}{2} X^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - (x-p)^2}}$$

donc

$$X' F' X = \frac{-(x-p)}{\sqrt{R^2-(x-p)^2}}.$$

Pour trouver la fonction seconde de FX, on substituera, comme dans l'exemple précédent, $x+k$ à la place de x dans l'expression de $X' F' X$, on négligera toutes les puissances de k supérieures à la première, et l'on développera jusqu'au second terme : on trouvera, par ce moyen, que le coefficient de k dans le dernier développement, est

$$\frac{-R^2}{\left(R^2-(x-p)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

94. Soit une fonction quelconque, des deux quantités X, Z, nous la représenterons par $F(X,Z)$: supposons que X et Z soient chacune des fonctions déterminées et connues de x; on demande de déterminer la première fonction dérivée de $F(X,Z)$.

Puisque X et Z sont des fonctions connues de x, en substituant $x+k$ à la place de x, X deviendra

$$X + X' k + X'' k^2 + X''' k^3 \ldots + \text{etc.}$$

et Z deviendra

$$Z + Z' k + Z'' k^2 + Z''' k^3 + \ldots + , X', X'' \ldots Z', Z'' \ldots$$

étant des fonctions connues de x; mais puisque la fonction prime qu'on cherche est le coefficient de la première puissance de k, il est visible qu'il ne peut pas être affecté des fonctions $X'', X''', Z'', Z''' \ldots$: on pourra donc négliger ces termes, et écrire simplement $F(X + X' k, Z + Z' k)$.

Supposons d'abord qu'il n'y a que X qui reçoive un accroissement, Z étant regardé comme constante : on se contentera d'écrire $F(X + X' k, Z)$ et développant cette fonction, on aura

$$F(X, Z) + X' k F'(X, Z) + \ldots \text{etc.}$$

on se rappellera que Z est supposé constante dans la fonction prime $F'(X, Z)$.

Substituons à présent $Z + Z'k$ à la place de Z, dans le dernier développement, le premier terme deviendra ...

$$F'(X, Z) + Z'k\,F_1(X, Z) + \ldots \text{ etc. } F_1(X, Z)$$

désignant que Z seul a reçu un accroissement dans ce terme. On ne cherchera pas le développement du second terme $X'k\,F'(X, Z)$, parce qu'il est visible qu'il ne contiendroit que des termes multipliés par k^2, k^3, ..., etc. réunissant donc les termes qui proviennent de ces deux développemens, on a

$$F(X + X'k, Z + Z'k)$$
$$= F(X, Z) + \{X'F'(X, Z) + Z'F_1(X, Z)\}k + \ldots$$

donc la fonction prime de $F(X, Z)$ sera ...

$$X'F'(X, Z) + Z'F_1(X, Z).$$

Exemple. Soit $(x^m \times \sqrt{a + bx^n})^p = F(X, Z)$: on fera

$$x^m = X, \quad \sqrt{a + bx^n} = Z, \text{ et } mx^{m-1} = X'$$
$$\frac{nbx^{n-1}}{\sqrt{a + bx^n}} = Z' :$$

on aura

$$F(X, Z) = (X.Z)^p ;$$

ce qui donne

$$F'(X, Z) = PZ(X.Z)^{p-1}F_1(XZ)$$
$$= pX(X.Z)^{p-1} :$$

donc la fonction prime de $(x^m \times \sqrt{a + bx^n})^p$

$$= p(x^m \times \sqrt{a + bx^n})^{p-1}\left(mx^{m-1}\sqrt{a + bx^n} + \frac{nbx^{m+n-1}}{2\sqrt{a + bx^n}}\right.$$

95. Soit une fonction quelconque de deux variables x et y, liées entr'elles par une équation représentée par $F(x,y)=0$, on suppose que ces deux variables sont tellement combinées, qu'il n'est pas possible de les dégager par la résolution de l'équation.

Puisque x dépend de y, et y de x, on peut regarder y comme une fonction inconnue de x, que nous représenterons par fx : on aura donc

$$F(x, fx) = 0.$$

Cette fonction ne contenant, ou étant censée ne contenir que des termes multipliés par des puissances de x, on peut la désigner par le signe $\varphi x = 0$: cette équation doit être vraie, quelle que soit la valeur de x ; donc elle aura lieu, en mettant $x+k$ à la place de x, quelle que soit la valeur de k : on aura donc une somme de fonctions dérivées, qui donneront l'équation

$$\varphi x + k\varphi' x + \frac{k^2}{2}\varphi'' x + \frac{k^3}{2.3}\varphi'''.x + \ldots \text{ etc.} = 0$$

Mais pour que cette équation se vérifie indépendamment de la valeur de k, il est nécessaire qu'on ait séparément $\varphi x = 0 \ldots \varphi' x = 0 \ldots \varphi'' x = 0 \ldots$ etc. : on aura donc autant d'équations différentes qu'on pourra former de fonctions dérivées. La première de ces équations est l'équation donnée : en la mettant sous la première forme, elle devient $F(x,y) = 0$. La seconde est la fonction prime de l'équation donnée, elle devient $F'(x,y) = 0$. La troisième est la fonction seconde de l'équation donnée, elle devient $F''(x,y) = 0 \ldots$ etc. ; d'où résulte ce principe qui est de la plus grande importance dans la théorie des équations, savoir que *si on a une équation entre deux variables x, y, l'équation*

subsistera encore entre la fonction prime, la fonction seconde, la fonction tierce ... et généralement entre telle fonction dérivée qu'on voudra de l'équation.

Pour avoir la valeur de $F'(x,y)=0$, on peut mettre x à la place de X, et y à la place de Z, dans l'article précédent, et l'on aura

$$X'=1, Z'=y',$$

donc $$F'(x,y)=F'(x,y)+y'F_1(x,y)$$

Soit l'équation

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+fy+g=0.$$

on aura $F'(x,y)=2ax+by+d.\ F_1(x,y)$

$$=2cy+bx+f.$$

donc la fonction prime de l'équation donnée, sera

$$(2ax+by+d)+y'(2cy+bx+f)=0.$$

96. Soit maintenant l'équation à *trois* variables $Z=F(x,y)$ dont on demande les fonctions dérivées.

Si on suppose que dans cette équation x et y acquièrent des valeurs particulières, Z sera déterminé; mais si une seule des variables x et y est donnée, on ne pourra rien conclure pour l'autre, qui sera susceptible d'un nombre indéfini de valeurs particulières, dont chacune combinée avec la valeur donnée de la première variable, fournira une valeur particulière de Z: d'où il suit que les variables x, y sont indépendantes entr'elles, et qu'on peut les faire varier chacune séparément, ou toutes les deux ensemble, sans que leurs accroissemens respectifs aient entr'eux aucun rapport déterminé: voyons donc quelle sera la loi du développement

de l'équation $Z=F(x,y)$, lorsque x devient $x+k$, et $y, y+0$.

Supposons d'abord qu'il n'y ait que la variable x qui reçoive un accroissement k, y demeurant constante, Z deviendra $F(x+k,y)$: et développant par les théorèmes connus, on aura $F(x+k,y)$

$$=F(x,y)+kF'(x,y)+\frac{k^2}{2}F''(x,y)+\frac{k^3}{2.3}F'''(x,y)+\ldots$$

Substituons maintenant dans cette dernière formule $y+0$ à la place de y, on aura

$$F(x+k,y+0)=F(x,y+0)+kF'(x,y+0)$$
$$+\frac{k^2}{2}F''(x,y+0)+\frac{k^3}{2.3}F'''(x,y+0)\ldots$$

97. Pour avoir l'expression des fonctions dérivées de $F(x+k,y+0)$, il est nécessaire de considérer la variation d'une même fonction, tantôt par rapport à x seulement, tantôt par rapport à y, tantôt par rapport aux deux variables : et pour distinguer dans les fonctions dérivées les termes qui sont dus en particulier aux variations de x et y, nous adopterons la notation que Lagrange a donnée dans la résolution des équations numériques (pag. 210).

Soit toujours $F(x,y)$ désigné par Z : pour désigner la fonction prime de Z par rapport à x, ou par rapport à y, on écrira $\left(\frac{Z'}{x}\right)$, $\left(\frac{Z'}{y}\right)$. Pour désigner la fonction seconde par rapport à x, on écrira $\left(\frac{Z''}{x^2}\right)$; par rapport à y, on écrira $\left(\frac{Z''}{y^2}\right)$, et par rapport à x et y, on écrira $\left(\frac{Z''}{xy}\right)$ et ainsi des autres. En faisant usage de cette notation, on trouvera que

$$F(x,y+o)=Z+o\left(\frac{Z'}{y}\right)+\frac{o^2}{2}\left(\frac{Z''}{y^2}\right)+\frac{o^3}{2.3}\left(\frac{Z'''}{y^3}\right)\cdots$$

$$F'(x,y+o)=\left(\frac{Z'}{x}\right)+o\left(\frac{Z''}{xy}\right)+\frac{o^2}{2}\left(\frac{Z'''}{xy^2}\right)+\frac{o^3}{2.3}\left(\frac{Z^{IV}}{xy^3}\right)\cdots$$

$$F''(x,y+o)=\left(\frac{Z''}{x^2}\right)+o\left(\frac{Z'''}{x^2y}\right)+\frac{o^2}{2}\left(\frac{Z^{IV}}{x^2y^2}\right)+\frac{o^3}{2.3}\left(\frac{Z^{V}}{x^2y^3}\right)\cdots$$

faisant ces substitutions, et ordonnant par rapport aux puissances de k, o, ko... etc. on aura

$$F(x+k,y+o)=Z+k\left(\frac{Z'}{x}\right)+o\left(\frac{Z'}{y}\right)+\frac{k^2}{2}\left(\frac{Z''}{x^2}\right)+ko\left(\frac{Z''}{xy}\right)+\frac{o^2}{2}\left(\frac{Z''}{x^2}\right)\cdots$$

98. On peut saisir facilement la loi que suivent ces termes et les suivans, relativement aux puissances et aux produits de k et o, et relativement aux puissances et produits de x et y qui sont sous le signe Z'. Voici l'énoncé de la règle qu'il faut suivre, pour avoir tous les termes qui conviennent à une même fonction dérivée.

Si l'on a l'équation $Z=F(x,y)$, *pour trouver les fonctions dérivées de* Z, *lorsque* x *devient* $x+k$, *et* $y, y+o$, *développez les puissances des binomes* $(k+o)^1\ldots\left(\frac{k+o}{2}\right)^2\ldots\left(\frac{k+o}{2}\right)^3\ldots\left(\frac{k+o}{2.3\ldots n}\right)^n$

chaque terme du développement sera multiplié par Z, portant autant de traits qu'il y a d'unités dans la somme des puissances de k et o qui le multiplient : on mettra sous Z, les mêmes puissances de x et y, qui se trouvent dans le développement des binomes en k et o, en sorte que le terme général sera

$$\frac{k^m o^n}{1.2.3...m(1.2.n...)}\left(\frac{Z^{m+n}}{x^m y^n}\right);$$

ainsi la fonction tierce de $F(x,y)$ sera composée des quatre termes suivans :

$$\frac{k^3}{1\,2\,3}\left(\frac{Z'''}{x^3}\right)+\frac{k^2 o}{(1\,2)1}\left(\frac{Z'''}{x^2 y}\right)$$
$$+\frac{k o^2}{(1.2)1}\left(\frac{Z'''}{x y^2}\right)+\frac{o^3}{1.2.3}\left(\frac{Z'''}{y^3}\right).$$

On a obtenu le développement précédent, en mettant d'abord $x+k$ à la place de x dans $F(x,y)$, ce qui a donné $F(x+k,y)$; on a ensuite substitué $y+o$ à la place de y, ce qui a donné le développement de $F(x+k,y+o)$. Si on eût commencé par substituer $y+o$ à la place de y, on eût eu le développement de $F(x,y+o)$; et mettant ensuite $x+k$, on eût obtenu celui de $F(y+o,x+k)$: or il est visible que les deux fonctions sont identiques, donc leurs développemens doivent l'être aussi; et comme on ne peut pas faire à-la-fois les deux substitutions dans la fonction indéterminée $F(x,y)$, il est visible que le résultat sera le même, quelqu'ordre qu'on suive, en prenant les fonctions dérivées relativement à x et y.

Soit l'équation $Z = x^m y^n$, on aura

$$\left(\frac{Z'}{x}\right) = m\,x^{m-1}\,y^{n}.$$

$$\left(\frac{Z'}{y}\right) = n\,x^{m}\,y^{n-1}\left(\frac{Z''}{x^{2}}\right) = m.m-1\,x^{m-2}y^{n}..$$

$$\left(\frac{Z''}{y^{2}}\right) = n.n-1\,x^{m}y^{n-2}..\left(\frac{Z''}{x\,y}\right) = m\,n\,x^{m-1}\,y^{n-1}...$$

On aura donc pour les premiers termes du développement

$$(x+k)^{m}(y+o)^{n} = x^{m}\,y^{n} + k\,m\,x^{m-1}\,y^{n}$$
$$+ n\,x^{m}\,y^{n-1} + \frac{m.m-1}{2}k^{2}\,x^{m-2}\,y^{n}$$
$$+ m\,n\,k\,o\,x^{m-1}y^{n-1} + \frac{n.n-1}{2}o^{2}x^{m-2}y^{n-2}.$$

99. On a vu par tout ce qui précède, que toute fonction algébrique se développe selon les puissances des accroissemens des variables dont elle est composée : les mêmes formules servent encore à développer les fonctions selon les puissances d'une des variables. Reprenons pour cela la formule du (n°. 92), et supposons que f soit la valeur de y, lorsque $x = o$, Y sera la valeur de y qui répond à $o + x$: mettant x à la place de k, et représentant par f', f'', f''', f^{IV} les fonctions dérivées de la fonction primitive qui répondent à $x = o$, on aura

$$Y = f + x\,f' + \frac{x^{2}}{2}f'' + \frac{x^{3}}{2.3}f''' + \frac{x^{4}}{2.3.4}f^{IV} + ...$$

Soit la fonction $Y = \frac{a}{a-x}$... en faisant $x = o$,

on a $$f = \frac{a}{a} = 1.$$

La fonction prime de $\frac{a}{a-x} = \frac{a}{(a-x)^2}$ (90) : en faisant $x = 0$, on a $f' = \frac{1}{a}$.

La fonction seconde de $\frac{a}{(a-x)}$ est $\frac{2a}{(a-x)^3}$; et si on fait $x = 0$, on a $f'' = \frac{2}{a^2}$.

La fonction tierce de $\frac{a}{a-x}$ est $\frac{6a}{(a-x)^4}$; et si on fait $x = 0$, on a $f''' = \frac{6}{a^3}$.

et ainsi des autres fonctions dérivées ; on aura donc

$$Y = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \ldots\ldots$$

Soit encore $Y = \sqrt{a^2 - x^2}$. en faisant $x = 0$, on a

$$f = a :$$

la fonction prime de $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, si on fait $x = 0$, on a $f' = 0$.

La fonction seconde de $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{-a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$: si on fait $x = 0$, on a $f'' = -\frac{1}{a}$.

On trouvera que la fonction tierce de $\sqrt{a^2 - x^2} = 0$, lorsque $x = 0$; on aura donc

$$Y = a - \frac{x^2}{2a} + \ldots \text{ etc.}$$

Les mêmes formules servent aussi pour le développement en séries des fonctions transcendantes ; mais avant de les y appliquer, nous devons faire connoître plus particulièrement ces deux sortes de fonctions.

Des logarithmes.

100. On a vu (*Arithm.* 166) que la manière la plus simple de concevoir les logarithmes, est d'imaginer deux progressions correspondantes ; l'une arithmétique, commençant par zéro ; l'autre géométrique, commençant par l'unité : mais pour approcher le plus qu'il est possible de comprendre tous les nombres entiers dans la progression géométrique, il faut faire en sorte qu'elle croisse si lentement que la différence d'un terme au suivant soit plus petite que toute grandeur assignable ; il faut par conséquent que le quotient qui doit régner dans la progression géométrique soit le plus petit possible, et que la différence commune dans la progression arithmétique correspondante soit insensible.

Supposons donc que le premier terme de la progression géométrique étant 1, le second soit $1+k$, k étant une quantité très-petite ; le choix des deux progressions étant arbitraire, on peut supposer que la raison de la progression arithmétique soit Mk, M étant une quantité arbitraire, et k l'accroissement très-petit du second terme de la progression géométrique : cela posé

Soient les deux progressions, géométrique et arithmétique,

$$1 . 1+k . (1+k)^2 . (1+k)^3 . (1+k)^4 \ldots (1+k)^n$$
$$0 . Mk . 2Mk . 3Mk . 4Mk \ldots nMk.$$

nMk sera le logarithme de $(1+k)^n$... Soit a ce dernier terme, et L son logarithme : on aura donc les deux équations

$$a=(1+k)^n \ldots L=nMk.$$

La première donne

$$k=a^{\frac{1}{n}}-1.$$

On tire de la seconde

$$k=\frac{L}{nM};$$

d'où on déduit

$$L=nM(a^{\frac{1}{n}}-1).$$

Par le moyen de cette équation on déterminera L ou a, lorsqu'un des deux sera connu.

101. Pour développer ces expressions en séries, supposons $a=1+x$, il en résultera

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}\left\{x+\frac{\frac{1}{n}-1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{n}-1.\frac{1}{n}-2}{2.3}x^3+\frac{\frac{1}{n}-1.\frac{1}{n}-2.\frac{1}{n}-3}{2.3.4}x^4\ldots\right\}$$

donc

$$L=M\left\{x+\frac{\frac{1}{n}-1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{n}-1.\frac{1}{n}-2}{2.3}x^3+\frac{\frac{1}{n}-1.\frac{1}{n}-2.\frac{1}{n}-3}{2.3.4}x^4\ldots\right\}$$

Plus n sera grand, plus il y aura de moyens proportionnels arithmétiques et géométriques insérés entre deux nombres donnés; savoir entre o et L dans la progression arithmétique, et entre 1 et a dans la progression géométrique; par conséquent plus la différence entre deux termes consécutifs sera petite : mais n peut croître à l'infini, donc la limite de $\frac{1}{n}$ sera zéro : on aura donc à la limite,

$$L, \text{ ou } \log(1+x) = M\left\{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots\right\}$$

La quantité M reste indéterminée, ce qui annonce que le même nombre peut avoir une infinité de logarithmes différens; mais comme le plus simple et le plus naturel de tous les systêmes est celui où l'on suppose $M = 1$, on a donné le nom de logarithmes naturels à ceux qui ont été calculés dans cette supposition : ce fut sur cette espèce de logarithmes que tomba Néper, quoiqu'en suivant une route différente (1). Ces logarithmes s'appellent aussi logarithmes hyperboliques, à cause du rapport qu'ils ont avec les espaces compris entre l'hyperbole équilatère et ses asymptotes; mais on verra, dans le calcul intégral, qu'il existe un semblable rapport entre chaque systême de logarithmes et une hyperbole déterminée; c'est donc à tort qu'on donne exclusivement le nom de logarithmes hyperboliques aux logarithmes naturels.

---

(1) Néper a d'abord considéré les nombres comme exprimés par des lignes, et ces lignes comme engendrées par le mouvement d'un point; la première, engendrée par le mouvement d'un point qui décrit en temps égaux des espaces en progression géométrique; et l'autre engendrée par le mouvement d'un point qui décrit en temps égaux des espaces en progression arithmétique : il a supposé; pour plus de simplicité, que les vîtesses relatives de ces deux points étoient égales dans les premiers instans, ce qui revient au même que de supposer que l'espace parcouru dans le premier moment par le premier point étant 1, et $1+k$ dans le second instant, l'espace parcouru par le second point est zéro dans le premier instant, et k dans le second, ce qui détermine les deux progressions

$$1 . 1+k . (1+k)^2 . (1+k)^3 \ldots . (1+k)^n$$
$$0 . k . 2k . 3k \ldots . nk.$$

Il est évident que tous les systèmes de logarithmes ont un rapport déterminé avec le système des logarithmes naturels, puisque dans tout système, le logarithme de $1+k$ est égal au logarithme naturel du même nombre, multiplié par la quantité constante M, qu'on nomme *le module* : cette quantité a une valeur différente pour chaque système. Nous ne tarderons pas à la déterminer; revenons aux logarithmes naturels de $1+x$.

102. La série que nous avons assignée ne peut être convergente qu'autant que x est moindre que l'unité; mais il est possible de la mettre sous une forme qui la rende généralement convergente : reprenons pour cela la série

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots$$

ajoutons de part et d'autre, $\log a$, on aura

$$\log(a+ax) = \log a + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots$$

Soit $ax = z$, et par conséquent $x = \frac{z}{a}$; on aura

$$\log(a+z) = \log. a + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} + \frac{z^5}{5a^5} \ldots$$

Le logarithme de $a-z$ ne diffère de celui de $a+z$ que par le signe des puissances impaires de $\frac{z}{a}$: on a donc

$$\log(a-z) = \log a - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^3} - \frac{z^4}{4a^4} - \frac{z^5}{5a^5} \ldots$$

Retranchant la seconde série de la première, on a

$$\log(a+z) - \log(a-z) = \log\left(\frac{a+z}{a-z}\right)$$

$$= 2\left\{\frac{z}{a} + \frac{z^3}{3a^3} + \frac{z^5}{5a^5} + \frac{z^7}{7a^7} \ldots\right\}$$

Soit enfin $\frac{a+z}{a-z} = \frac{m+1}{m}$;

ce qui donne $\frac{z}{a} = \frac{1}{2m+1}$.

on aura donc $\log m + 1 = \log m$

$$+2\left\{\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \frac{1}{7(2m+1)^7} \ldots\right\}$$

103. Cette série sera d'autant plus convergente, que m sera plus grand; elle donnera le logarithme de $m+1$, lorsqu'on connoîtra celui de m; et pour avoir le logarithme des tables du même nombre, il suffira de multiplier le logarithme naturel par le module que nous allons déterminer.

Prenons le logarithme naturel de 10 que nous représenterons par $\log^{(n)} 10$; le logarithme des tables sera représenté par $\log^{T} 10$: on a l'équation

$$\log^{T} 10 = M \log^{(n)} 10,$$

et par conséquent

$$M = \frac{\log^{T} 10}{\log^{(n)}.10};$$

or le logarithme des tables de 10 est 1, et on trouve par la série ci-dessus que le logarithme naturel de 10 est 2,3025851... donc

$$M = \frac{1}{2,3025851\ldots} = 0,434294\ldots$$

Si on avoit pris le logarithme tabulaire de tout autre nombre b, on auroit eu

$$\log^{T} b = M.\log^{(n)}.b,$$

et par conséquent

$$M = \frac{\log^{T}.b}{\log^{(n)}.b},$$

ce qui indique que le module est le rapport du logarithme tabulaire d'un nombre à son logarithme naturel.

104. La série précédente est assez convergente pour trouver facilement les logarithmes des nombres plus grands que 10; mais pour les nombres au-dessous de 10 on peut se servir de la suivante:

Soit $1+x=a$, ou $x=a-1\ldots$ donc

$$\log a = M\left\{a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\frac{(a-1)^5}{5}\ldots\right\}$$

Si la quantité $a-1$ étoit une fraction extrêmement petite, cette série seroit assez convergente pour n'avoir besoin que du premier terme; or on peut toujours la rendre telle par un artifice bien simple: Supposons que $a=\sqrt[m]{b}$, on aura

$$\log a = \log b^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}\log b:$$

en faisant cette substitution, on a

$$\log b = mM\left\{\sqrt[m]{b}-1-\frac{(\sqrt[m]{b}-1)^2}{2}+\frac{(\sqrt[m]{b}-1)^3}{3}-\ldots\right\}$$

On pourra prendre pour m un nombre tel que $\sqrt[m]{b}$

diffère aussi peu qu'on voudra de l'unité; en sorte que $\sqrt[m]{b}-1$ pourra être une fraction extrêmement petite, et pour lors $(\sqrt[m]{b}-1)^2$ et les termes suivans pourront être négligés : on aura donc

$$\log b = m M (\sqrt[m]{b} - 1).$$

Par la même raison

$$\log a = m M \sqrt[m]{a} - 1 :$$

donc

$$\frac{\log b}{\log a} = \frac{\sqrt[m]{b} - 1}{\sqrt[m]{a} - 1}.$$

Si $a = 10$, son logarithme des tables $= 1$; donc

$$\log {}^{T} b = \frac{\sqrt[m]{b} - 1}{\sqrt[m]{10} - 1}.$$

105. C'est par cette formule que les premiers calculateurs de tables, Brigs et Wlac, ont calculé les premiers logarithmes (*Arith.* 172); ils avoient remarqué qu'en faisant des extractions successives de racines quarrées d'un nombre quelconque, si on s'arrête dans une de ces extractions à deux fois autant de décimales qu'il y a de zéros à la suite de l'unité; lorsqu'il n'y a plus que l'unité devant la virgule, la partie décimale de cette racine se trouve exactement la moitié de celle de la racine précédente, en sorte que les parties décimales ont entre elles le même rapport que les logarithmes des racines.

Soit en effet $1 + \alpha$ une racine déjà obtenue, α étant une fraction décimale très-petite : si on

extrait de nouveau la racine quarrée, on aura

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\alpha}{2} \ldots + \text{etc.}$$

et par conséquent $(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\alpha}{2} \ldots + \text{etc.}$

ainsi en supposant $m = 2^{60}$, et $b = 3$, on a

$$\log^{T} 3 = \frac{\sqrt[2^{60}]{3} - 1}{\sqrt[2^{60}]{10} - 1}$$

$$= \frac{0{,}000000000000000000952894}{0{,}000000000000000001997174} \ldots$$

$$= \frac{952894}{1997174} = 0{,}47712125.$$

Ceux qui desireront plus de détail sur la théorie des logarithmes, peuvent consulter les tables de Callet, nouvelle édition, discours préliminaire (page 12).

106. Proposons-nous actuellement le problème inverse: étant donné un logarithme, trouver le nombre auquel il appartient.

Reprenons l'équation

$$L = nM\left(a^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

on en déduira

$$a = \left(1 + \frac{L}{Mn}\right)^{n};$$

en développant le binome, on trouve

$$a = 1 + \frac{nL}{nM} + \frac{n.n-1}{2}\frac{L^2}{n^2M^2}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\frac{L^3}{n^3M^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.3.4}\frac{L^4}{n^4M^4} + \ldots$$

ou

$$a = 1 + \frac{L}{M} + \frac{1-\frac{1}{n}}{2}\frac{L^2}{M^2}$$

$$+ \frac{1-\frac{1}{n}.1-\frac{2}{n}}{2.3}\frac{L^3}{M^3} + \frac{1-\frac{1}{n}.1-\frac{2}{n}.1-\frac{3}{n}}{2.3.4}\frac{L^4}{M^4} \ldots$$

mais à la limite $\frac{1}{n} = 0$: donc à la limite on a

$$a = 1 + \frac{L}{M} + \frac{L^2}{2M^2} + \frac{L^3}{2.3M^3} + \frac{L^4}{2.3.4.M^4} + \ldots$$

or $\frac{L}{M} = \log^{(a)} a$, donc

$$a = 1 + \log a + \left(\frac{\log a}{2}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\log a}{2.3}\right)^3 + \left(\frac{\log a}{2.3.4}\right)^4 + \ldots \text{ etc.}$$

107. On peut aussi déduire la théorie des logarithmes de celle des puissances, de la manière suivante.

Soit l'équation $y = A^x$: il est visible que x marque à quelle puissance il faut élever A, pour qu'il soit égal à y : et puisque le logarithme d'une puissance est toujours égal au logarithme de la racine, multiplié par l'exposant de la puissance, il s'ensuit que l'on a $\log y = x \log A$: si $\log A$ est 1, on

a $\log. y = x$: on peut donc dire que le logarithme d'un nombre, est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever A, pour qu'il soit égal au nombre donné (*Arith.* 175); et comme A peut représenter tous les nombres, il s'ensuit que tous les systêmes possibles de logarithmes sont contenus dans l'équation $y = A^x$. La quantité constante représentée par A, est appelée la base du systême; ainsi lorsque $A = 10$, on a les logarithmes des tables.

Pour développer en série l'expression de A^x, on aura recours aux formules précédentes; supposons $y = a$, et par conséquent $x \log A = \log. a$: on aura

$$a = A^x = 1 + x \log A + \frac{(x \log A)^2}{2}$$

$$+ \frac{(x \log A)^3}{2.3} + \frac{(x \log A)^4}{2.3.4} + \ldots$$

Pour que cette formule ne convienne qu'aux logarithmes naturels, il faut supposer que A est la base du systême, et pour lors $\log^{(n)} A = 1$: nous désignerons cette base par un signe particulier e : on aura donc

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

Quant à la valeur de cette base, on la trouvera en faisant $x = 1$, et on aura

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots$$

$$= 2,7\,18\,28\,18. \text{ (*Arith.* 171)}$$

On voit par le développement précédent, que e^x est égal à ce que devient le binome $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$,

lorsque n est plus grand que toute grandeur assignable, formule très-remarquable, et que nous aurons occasion de revoir.

108. Si l'on avoit $e^{x \log A}$, à développer en série, on auroit

$$1 + x \log A + \frac{(x \log A)^2}{2} + \frac{(x \log A)^3}{2.3} + \frac{(x \log A)^4}{2.3.4} + \ldots$$

Mais ce développement est le même que celui de A^x (107) : donc $A^x = e^{x \log A}$: on peut donc ramener toute expression exponentielle, dont la base est donnée à une autre expression exponentielle, dont la base est e : ainsi

$$10^x = (2,7\,182\,818)^{x \log 10}.$$

Du développement en série des fonctions circulaires.

109. Les expressions des sinus données par des arcs de cercle, ou réciproquement celles des arcs par les sinus, sont d'un fréquent usage dans l'analyse : nous allons en poser les principes.

Soit un arc quelconque représenté par z, on sait par les premiers principes de la trigonométrie, que $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, ou

$$(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)(\cos z - \sqrt{-1} \sin z) = 1$$

Si l'on a deux arcs x et y, et qu'on multiplie $\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x$, par $\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y$, on trouvera, en ayant égard aux formules démontrées (*Géom.* 361) $(\cos x \pm \sqrt{-1} \sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y = \cos(x+y) \pm \sqrt{-1} \sin(x+y)$:

d'où il résulte, en faisant successivement $y = x$, $= 2x, \ldots = 3x, \ldots = nx$, que l'on aura généralement

$$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx \pm \sqrt{-1}\sin nx.$$

Le double signe $\pm$ produit les deux équations suivantes :

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx \ldots (1)$$

$$(\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx - \sqrt{-1}\sin nx \ldots (2)$$

Ces deux équations ajoutées d'abord entr'elles, et ensuite retranchées, donnent les suivantes :

$$\cos nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n + (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2} \ldots (3)$$

$$\sin nx = \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n - (\cos x - \sqrt{-1}\sin x)^n}{2\sqrt{-1}} \ldots (4)$$

Supposons $nx = z$, et par conséquent $x = \frac{z}{n}$, on aura

$$\cos z = \frac{\left(\cos\frac{z}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right)^n + \left(\cos\frac{z}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right)^n}{2} \ldots (5)$$

$$\sin z = \frac{\left(\cos\frac{z}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right) - \left(\cos\frac{z}{n} - \sqrt{-1}\sin\frac{z}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}} \ldots (6)$$

110. Si n et x sont variables, chacune en particulier, mais de manière que le produit nx reste toujours le même, il est visible que plus x dimi-

nuera, plus n augmentera : donc à la limite de n, les deux équations précédentes deviendront

$$\cos x = \frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2}$$

$$\sin x = \frac{\left(1 + \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{n}\right)^n}{2\sqrt{-1}}$$

III. Si on compare ces binomes avec ceux que nous avons trouvés pour l'expression de e^x, on verra qu'ils sont les mêmes, en mettant $z\sqrt{-1}$ à la place de x : on peut donc mettre les deux équations précédentes sous la forme suivante :

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \ldots\ldots (7)$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots\ldots (8)$$

Ces formules sont d'un grand usage dans l'analyse, et servent à exprimer en sinus et cosinus réels, les exponentielles imaginaires.

L'équation 7 donne

$$(\cos z)^n = \frac{1}{2^n}\left\{e^{nz\sqrt{-1}} + n\,e^{(n-2)z\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{n.n-1}{2} e^{(n-4)z\sqrt{-1}} + ne^{-(n-2)z\sqrt{-1}} + e^{-nz\sqrt{-1}}\right\}$$

n étant un nombre entier positif. Les termes qui sont à égales distances des extrêmes ayant même

coefficient, on pourra les réunir, et mettre l'équation précédente sous la forme

$$(\cos z)^n = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\frac{e^{nz\sqrt{-1}}+e^{-nz\sqrt{-1}}}{2}\right.$$
$$+ n.\frac{(e^{(n-2)z\sqrt{-1}}+e^{-(n-2)z\sqrt{-1}})}{2}$$
$$\left.+\frac{n.n-1}{2}\frac{(e^{n-4z\sqrt{-1}}+e^{-(n-4)z\sqrt{-1}})}{2}+\ldots\ldots\text{etc.}\right\}$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos nz + n.\cos(n-2)z\right.$$
$$\left.+\frac{n.n-1}{2}\cos(n-4)z+\ldots\right\}$$

Si n est un nombre impair, le nombre des termes du développement sera pair; chaque terme, dans la première moitié, aura son correspondant dans la seconde, et l'on pourra les réunir deux à deux, comme dans l'exemple précédent. La dernière réunion donnera $n\cos z$. Si n est un nombre pair, le nombre des termes du binome sera impair, et il y aura un terme moyen également éloigné des extrêmes représenté par

$$\frac{n.n-1.n-2n-3\ldots\frac{n}{2}+1\,e^{(n-n)z\sqrt{-1}}}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}$$

et à cause de $e^{(n-n)z\sqrt{-1}}=1$, ce dernier terme se réduit à

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots\frac{n}{2}+1}{1.2.3\ldots\frac{n}{2}}$$

on aura donc pour dernier résultat

$$2^{n-1}(\cos z)^n = \cos nz + \overline{n.\cos n-2z} + \frac{n.n-1}{2}\cos \overline{n-4}z + \ldots + N\cos z,$$

si n est un nombre impair, ou

$$\frac{+n.n-1.n-2\ldots\frac{n}{2}+1}{1.2.3.4.\ldots\frac{n}{2}}$$

si n est pair.

L'équation 8 donne

$$(\sin z)^n = \frac{1}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{e^{nz\sqrt{-1}} - n\,e^{n-2z,\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{n.n-1}{2}e^{n-4z\sqrt{-1}} - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}e^{n-6z\sqrt{-1}} + \ldots \pm e^{-nz\sqrt{-1}}\right\}$$

Nous distinguerons deux cas, 1°. si n est un nombre pair, les termes également éloignés des extrêmes, auront le même signe et le même coefficient : en les réunissant, on aura

$$\sin z)^n = \frac{2}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\frac{e^{nz\sqrt{-1}}+e^{-nz\sqrt{-1}}}{2} - n.\left(\frac{e^{\overline{n-2z}\sqrt{-1}}+e^{-(n-2)z\sqrt{-1}}}{2} + \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{+n.n-1.n-2\ldots\frac{n}{2}+1}{1.2.3.\ldots\ldots\frac{n}{2}}\right\}\right.$$

$$= \frac{2}{(2\sqrt{-1})^n}\left\{\cos nz - n\cos\overline{n-2}z + \frac{n.n-1}{2}\cos n-4z - \ldots\right.$$

$$\left. \frac{+n.n-1.n=2\ldots\frac{n^{+1}}{1}}{1.2.3.\ldots.\frac{n}{2}}\right\}$$

Quant au facteur $(2\sqrt{-1})^n$, il est visible qu'il se réduit à $\pm 2^n$, lorsque n est pair : le signe supérieur ayant lieu lorsque n est un multiple de 4, et le signe inférieur a lieu lorsque n est simplement multiple de 2.

2°. Si n est impair, les termes également éloignés des extrêmes auront le même coefficient, et un signe différent : en les réunissant deux à deux, on aura

$$(\sin z)^n = \frac{1}{(\sqrt{-1})^{n-1}}\left\{\frac{e^{nz\sqrt{-1}} - e^{-nz\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - n\frac{(e^{(n-2)z\sqrt{-1}} - e^{-(n-2)z\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} + \ldots\right\} = \pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sin nz - n \cdot \sin\overline{n-2}\,z\right.$$

$$\left. + \frac{n \cdot n-2}{2}\sin\overline{n-4}\,z - \ldots + N\sin z \cdot \right\}\ldots$$

Par ces deux formules, on développera les puissances des sinus et cosinus en sinus et cosinus d'arcs multiples.

Les deux équations (7) (8) ajoutées d'abord entr'elles, et ensuite retranchées, donnent

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\sin z \ldots\ldots (10)$$

$\pm z\sqrt{-1}$ est le logarithme naturel de $e^{\pm z\sqrt{-1}}$; prenant donc le logarithme des deux membres de l'équation, on a

$$z = \frac{\log(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)}{\sqrt{-1}} \ldots\ldots (11)$$

$$z = -\frac{\log(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)}{\sqrt{-1}} \ldots (12)$$

Ajoutant

Ajoutant les deux équations, et observant que la différence des deux logarithmes est le logarithme du quotient, on a

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left\{ \frac{\cos z + \sqrt{-1}\sin z}{\cos z - \sqrt{-1}.\sin z} \right\} \ldots\ (13)$$

Par le moyen de ces dernières équations, on exprime les logarithmes imaginaires en arcs de cercle réels.

112. Les deux formules exponentielles $e^{z\sqrt{-1}}$, $e^{-z\sqrt{-1}}$ développées, donnent

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \ldots \text{ etc.}$$

$$e^{-z\sqrt{-1}} = 1 - z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{2.3.4.5} - \ldots \text{ etc.}$$

en les ajoutant ensemble, et divisant ensuite par 2, on a

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\text{ou } \cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{z^8}{1.2 \ldots 8} \ldots\ (14)$$

En retranchant la seconde de la première, et divi-

sant par $2\sqrt{-1}$, on a

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

ou $\sin z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2...7}$...(15)

Ces deux dernières formules donnent le développement des sinus et cosinus d'un arc en fonction de cet arc.

113. L'équation (13) peut se mettre sous cette forme

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{lag.} \left\{ \frac{1 + \sqrt{-1}\,\text{tang.}\, z}{1 - \sqrt{-1}\,\text{tang.}\, z} \right\} \cdots$$

Cette formule comparée à $\log. \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ (102) et développée, donne

$$z = \text{tang.}\, z + \frac{\text{tang.}^3 z}{3} + \frac{\text{tang.}^5 z}{5} + \frac{\text{tang.}^7 z}{7} \cdots$$

114. Si on élève les équations (9) et (10) à la puissance $\frac{m}{n}$, on aura

$$e^{\frac{m}{n} z\sqrt{-1}} = (\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^{\frac{m}{n}}$$

$$e^{-\frac{m}{n} z\sqrt{-1}} = (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^{\frac{m}{n}}$$

Mais si on suppose $\frac{m}{n} z = \varphi$, on a

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

quelle que soit la valeur de ϕ : donc on a généralement

$$\cos\frac{m}{n}z \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m}{n}z = (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^{\frac{m}{n}},$$

quelle que soit la valeur de $\frac{m}{n}$.

115. Au moyen de ces formules, on peut généraliser ce que nous avons dit sur les extractions des racines des quantités de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ (46); soit la quantité $(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$, que nous pouvons écrire sous la forme suivante

$$\left(\frac{a}{r} \pm \frac{b}{r}\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{n}} \times r^{\frac{1}{n}}, r \text{ étant } \sqrt{a^2+b^2}$$

Soit φ l'arc dont le cosinus est $\frac{a}{r}$, et le sinus $\frac{b}{r}$: on aura

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \times (\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi)^{\frac{1}{n}}$$

$$= r^{\frac{1}{n}} \times \left(\cos\frac{\varphi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

où l'on voit que cette expression conserve toujours la forme $m \pm n\sqrt{-1}$.

Ces formules appliquées à la résolution des équations du troisième degré, donnent une expression très-simple de ses racines, lorsqu'elles sont dans le cas irréductible.

Soit l'équation

$$x^3 - px + q = 0 :$$

on sait qu'une des racines est

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{p^3}{27}}};$$

cette racine est réelle, lorsqu'on a $\frac{p^3}{27}>\frac{1}{4}q^2$ (49); elle se présente cependant sous la forme imaginaire dont il n'a pas été possible de la débarrasser, autrement que par les formules de la trigonométrie. Soit fait

$$-\frac{1}{2}q=a;\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{p^3}{27}}=b\sqrt{-1}$$

on aura

$$x=(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

et $$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{p^3}{27}}$$

si l'on désigne par φ l'angle dont le cosinus est $\frac{a}{r}$, et le sinus $\frac{b}{r}$, on aura

$$(a\pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right);$$

or comme au même cosinus $\frac{a}{r}$ répondent les angles φ, $2\pi+\varphi$, $4\pi+\varphi$; 2π étant le rapport de la circonférence au diamètre, on aura

$$x = r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right)$$

$$+ r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\varphi}{4} - \sqrt{-1}\sin\frac{\varphi}{3}\right) = 2r^{\frac{1}{3}}\left(2\cos\frac{\varphi}{3}\right)$$

ou $$x = r^{\frac{1}{3}} \times 2.\cos\frac{2\pi + \varphi}{3},$$

ou $$x = r^{\frac{1}{3}} \times 2\cos\frac{4\pi + \varphi}{3}.$$

$$r^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} = \sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$\frac{a}{r} = \frac{-q}{\sqrt{\frac{4p^3}{27}}};$$

ainsi toutes les quantités qui entrent dans ces racines, sont fonctions des coefficiens p, q de l'équation.

Soit l'équation

$$x^3 - 3x - 1 = 0:$$

on a ici

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ r = 1,\ \cos\varphi = \frac{1}{2},$$

donc $\varphi = 60°$: et par conséquent les trois racines de l'équation seront

$$x = 2\cos 20°,$$

ou $x = 2\cos 140°$, ou $x = 2\cos 260°$.

On résoudroit avec la même facilité, par les formules de la trigonométrie, le cas où l'équation a des racines imaginaires.

116. On a vu (44) qu'une équation de la forme $x^{2k+1} - 1 = 0$ a une racine réelle $= 1$, et $2k$, racines imaginaires représentées par $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \ldots \alpha^{2n} \ldots$

Soit $$a = a \pm b\sqrt{-1} = r\left(\frac{a}{r} \pm \frac{b}{r}\sqrt{-1}\right)$$

$$= r(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi):$$

on aura donc

$$\alpha^2 \ldots = r^2(\cos 2\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 2\varphi)$$
$$\alpha^3 \ldots = r^3(\cos 3\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 3\varphi)$$
$$\alpha^4 \ldots = r^4(\cos 4\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 4\varphi)$$
$$\text{et } \ldots = \ldots$$
$$\alpha^{2k} \ldots = r^{2k}(\cos 2k\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 2k\varphi).$$

On a aussi

$$\alpha^{2k+1} = 1 = r^{2k+1}(\cos 2k+1.\varphi \pm \sqrt{-1}\sin 2k+1.\varphi).$$

Le double signe $\pm$ donne les deux équations

$$r^{2k+1}(\cos 2k+1.\varphi + \sqrt{-1}\sin 2k+1.\varphi) = 1$$
$$r^{2k+1}(\cos 2k+1.\varphi - \sqrt{-1}\sin 2k+1.\varphi) = 1$$

Ajoutant d'abord entr'elles les deux équations, et ensuite retranchant la seconde de la première, on aura les deux suivantes,

$$r^{2k+1}\cos 2k+1.\varphi = 1, \quad r^{2k+1}\sin 2k+1.\varphi = 0.$$

La dernière de ces deux équations dit que l'arc $2k+1.\varphi$ doit être un multiple de la circonférence, par conséquent $= 2m\pi$; mais pour lors, $\cos 2k+1.\varphi = 1$, et par conséquent $r^{2k+1} = 1$, ou $r = 1$: donc

$\varphi = \frac{2m\pi}{2k+1}$: ainsi la formule générale de toutes les racines de l'équation $x^{2k+1} - 1 = 0$, est

$$x = \cos\frac{2m\pi}{2k+1} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{2m\pi}{2k+1}.$$

Cette formule convient même à la racine réelle, car l'on a $a^{\circ} = 1$, et faisant $m + 0$ dans la formule générale, on a $x = 1$.

Faisons maintenant quelques applications des formules du (n°. 89 et suivans) au développement des fonctions transcendantes.

117. 1°. Soit $Fx = a^x$, on aura

$$F(x+k) = a^{x+k} = a^x \times a^k;$$
$$\text{or} \quad a^k = 1 + k\log.a \ (107);$$

donc $F'x = a^x \log.a$. Pour avoir $F''x$, on substituera $x + k$ à la place de x dans $F'x = a^x \log.a$; et comme cette fonction dérivée est égale à la fonction primitive multipliée par la quantité constante $\log.a$, il est visible que la fonction seconde sera égale à la fonction prime, multipliée par $\log a$: on aura donc

$$F''x = a^x(\log.a)^2;$$

par la même raison

$$F'''x = F''x \times \log.a = a^x(\log.a)^3,$$

et ainsi des autres: on aura donc

$$a^{x+k} = a^x\left\{1 + k\log a + \frac{(k\log a)^2}{2} + \frac{(k\log a)^3}{2.3} + \frac{(k\log a)^4}{2.3.4}\ldots\right\}$$

Si on divise par a^x, et qu'on change k en x, on aura

$$a^x = 1 + x \log. a + \frac{x^2}{2} (\log. a)^2$$

$$+ \frac{x^3}{2.3} (\log. a)^3 + \frac{x^4}{2.3.4} (\log. a)^4 \ldots \quad (107)$$

118. 2°. Soit

$$Fx = \log. x \ldots F(x+k) = \log. (x+k):$$

ou $$F(x+k) - F(x) = \log. (x+k) - \log. x$$

$$= \log. \left(1 + \frac{k}{x}\right) \ldots$$

Le premier terme du développement du premier membre, est $kF'x$; le premier terme du développement du second membre est $\frac{k}{x}$ (102), donc

$$F'x = \frac{1}{x};$$

pour avoir $F''x$, on substituera $x + k$ à la place de x, et l'on développera jusqu'au second terme; on aura ainsi

$$\frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} - \frac{k}{x^2};$$

donc $$F''x = -\frac{1}{x^2} \ldots$$

On aura $F'''x$, en substituant $x + k$ à la place de x dans $-\frac{1}{x^2}$, en développant jusqu'au second terme: ainsi

$$\frac{-1}{(x+k)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{2k}{3x^3};$$

donc $$F''' x = \frac{2}{3x^3}.$$

on aura donc

$$\log(x+k) = \log x + \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2.x^2} + \frac{k^3}{3.x^3} \ldots \text{ etc.}$$

119. 3°. Soit $Fx = \sin x \ldots F(x+k)$
$= \sin(x+k) = \sin x \cos k + \sin k \cos x.$

On a déjà trouvé (112)

$$\cos k = 1 - \frac{k^2}{2} \ldots \quad \sin k = k - \frac{k^3}{2.3}.$$

donc le coefficient du terme contenant k, est $\cos x$; par conséquent $F'x = \cos x$. Pour déterminer $F''x$, on mettra $x+k$ à la place de x dans $F'x = \cos x$, et l'on aura

$$\cos(x+k) = \cos x . \cos k - \sin x . \sin k;$$

mettant à la place de $\sin k$, $\cos k$, leurs valeurs développées, on a pour coefficient du second terme $-\sin x$, donc $F''x = -\sin x$: maintenant il est visible que

$$F''' x = -\cos x, \ldots \quad F^{IV} x = +\sin x \ldots \text{ etc.}$$

donc

$$\sin(x+k) = \sin x + k\cos x - \frac{k^2}{2}\cos x - \frac{k^3}{2.3}\sin x + \ldots$$

On trouvera aussi par un calcul semblable,

$$\cos(x+k) = \cos x - k\sin x - \frac{k^2}{2}\cos x + \frac{k^3}{2.3}\sin x + \ldots$$

120. 4°. Enfin soit

$$Fx = x^{\sqrt{n}}$$

on aura

$$F(x+k)=(x+k)^{\sqrt{m}},$$

$\sqrt{m}$ désigne ici une incommensurable, ou une imaginaire; il est d'abord évident qu'il suffit de trouver le coefficient du second terme du développement, car le coefficient une fois trouvé, on connoît la loi par laquelle les autres dérivent du second: pour ne rien supposer qui n'ait été démontré, on fera

$$(x+k)^{\sqrt{m}}=x^{\sqrt{m}}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\sqrt{m}}.$$

Soit ensuite

$$\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\sqrt{m}}=1+A\frac{k}{x}+B\frac{k^2}{x^2}+\ldots \text{ etc.}$$

Soit encore

$$\log.\left(1+\frac{k}{x}\right)=\varphi.\frac{k}{x}.$$

On pourra écrire

$$e^{\sqrt{m}.\varphi\frac{k}{x}}=1+A\frac{k}{x}+\ldots \quad (108)$$

si m est positif, $\sqrt{m}.\varphi\frac{k}{x}$ représentera une quantité réelle, et en développant (107) on a

$$1+\sqrt{m}.\varphi\frac{k}{x}+\ldots=1+A\frac{k}{x}+\text{etc.}$$

mais

$$\varphi.\frac{k}{x}=\log\left(1+\frac{k}{x}\right)=\frac{k}{x}+\ldots \text{ etc. } (102)$$

donc $A=\sqrt{m}$, et par conséquent le second terme du développement de

$$x^{\sqrt{m}}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\sqrt{m}}$$

sera $\sqrt{m}.\ x^{\sqrt{m}-1}\ k\ldots$

donc $F'x=\sqrt{m}.x^{\sqrt{m}-1}$:

Si m est négatif, $\sqrt{m}=n\sqrt{-1}$,

et $\sqrt{m}.\varphi\frac{k}{x}=n.\varphi\frac{k}{x}\sqrt{-1}\ldots$

$n\varphi.\frac{k}{x}$ pourra être pris pour un arc de cercle réel, qu'on désignera par z, et on aura

$$e^{n\varphi\frac{k}{x}\sqrt{-1}}=e^{z\sqrt{-1}}=\cos z+\sqrt{-1}.\sin z:$$

or $\cos z=1-\frac{z^2}{2}\ldots$

et $\sin z=z-\frac{z^3}{2.3}=n\varphi.\frac{k}{x}\ldots$

$$=n:l.\left(1+\frac{k}{x}\right)=\ldots\frac{nk}{x},+\ldots$$

donc le coefficient de k sera $\frac{n\sqrt{-1}}{x}$ et par conséquent $F'x=n\sqrt{-1}\,x^{n\sqrt{-1}}$;

donc la loi du développement du binome, lorsque l'exposant est incommensurable ou imaginaire, est la même que pour un exposant entier.

Des différentes espèces de séries qui dérivent des progressions arithmétiques et géométriques.

121. Parmi les différentes suites dont on s'occupe dans l'analyse, les plus utiles sont celles qui dérivent des progressions arithmétiques et géométriques. On nomme les premières séries des nombres figurés, ou des nombres polygones; et les secondes sont appelées séries récurrentes.

Pour former les nombres figurés, on prend une suite de nombres constans, telle que

1.1.1.1.1.1.1.1.1.

On en forme une seconde en prenant la somme des termes correspondans de la première : on aura ainsi la suite

1.2.3.4.5.6.7.8.9...

On formera la troisième, en prenant la somme des termes correspondans de la seconde; on aura ainsi la suite

1.3.6.10.15.21.28.36....

On formera la quatrième, en prenant la somme des termes correspondans de la troisième; on aura ainsi la somme

1.4.10.20.35.56.84.120.165,

et ainsi des autres.

La première suite est appelée suite des nombres constans; la seconde, suite des nombres naturels; la troisième, suite des nombres triangulaires; la quatrième, suite des nombres pyramidaux... etc. On les nomme figurés, parce que les quatre premiers ordres se déduisent de quelques considéra-

tions sur les figures de géométrie, comme on peut le voir dans les Elémens d'algébre d'Euler.

La manière dont on a vu que se forment ces séries, nous indique que si on prend la différence de chaque terme au précédent, on formera une série qu'on appellera série des premières différences. Par exemple : si de 165 on retranche 120, on aura 45 : si de 120 on retranche 84, on aura 36 : si de 84 on retranche 56, on aura 28, et ainsi des autres. Etant donnée, par exemple,

La série des nombres pyramidaux,

1.4.10.20.35.56.84.120.165,

on formera la série des nombres triangulaires

1.3.6.10.15.21.28.36.45,

qu'on nommera série des premières différences, parce que chaque terme est la différence de deux termes consécutifs de la précédente.

Si on prend pareillement la différence de deux termes consécutifs dans la série des nombres triangulaires, on formera la série des nombres naturels, qu'on nommera série des différences secondes, parce qu'effectivement, chaque terme de cette série est la différence de la différence des termes de la première.

Si on prend encore la différence de deux termes consécutifs dans la série des nombres naturels, on formera la série des nombres constans, qu'on nomme série des différences constantes, parce qu'en effet les termes de cette dernière série étant les différences des termes d'une progression arithmétique, et ces différences étant égales, il s'ensuit que les termes de la série dont on s'occupe, sont égaux et constans.

122. Une des propriétés les plus remarquables des nombres figurés, est que si on élève un bi-

Si on finit le calcul indiqué, on trouvera l'expression suivante pour le terme général de la cinquième série...

$$\frac{n.n+1.n+2.n+3}{1.2.3.4}...$$

En général, si $\frac{n.n+1.n+2...n+m-1}{1.2.3.4....\ m-1\times m}$

est le terme général d'une des séries des nombres figurés, le terme général de la série d'un ordre plus élevé d'une unité, sera

$$\frac{n.n+1.n+2...n+m-1.n-m}{1.2.3...\quad m.m+1}.$$

Les termes généraux des différentes séries que nous venons de trouver, ne sont autre chose que les coefficiens des termes consécutifs du binome de Newton : il y a pourtant cette différence, que le coefficient du troisième terme du binome, par exemple, est $\frac{n.n-1}{2}$, tandis qu'on a trouvé $\frac{n.n+1}{2}$ pour le terme général des nombres triangulaires : la raison de cette différence est que dans le binome, chaque coefficient, à compter du troisième terme, présente la somme d'un nombre de termes moindre d'une unité ; et par conséquent, dans le troisième terme du binome, n devient $n-1$, et $\frac{n.n+1}{2}$ se change en $\frac{n-1.n}{2}$: par la même raison, dans le coefficient suivant, n devient $n-2$, et par conséquent $\frac{n.n+1.n+2}{2.3}$ se change en $\frac{n.n-1.n-2}{2.3}$.

124. Le terme sommatoire des séries que nous considérons, n'est pas difficile à trouver; car il est visible que le terme sommatoire d'une des séries des nombres figurés, est le terme général de la série suivante : ainsi

Le terme sommatoire de la série des nombres constans $= n$.

Le terme sommatoire de la série des nombres naturels $= \frac{n.n+1}{2}$.

Le terme sommatoire de la série des nombres triangulaires $= \frac{n.n+1.n+2}{2.3}$.

Le terme sommatoire de la série des nombres pyramidaux $= \frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.3.4}$.

125. Pour former les nombres polygones, on suppose une progression arithmétique dont la différence est d : on prend successivement la somme de tous ses termes, depuis le premier jusqu'à celui du rang n : cette somme est le terme polygone de la série correspondante : d'où il suit qu'il y aura autant de séries polygones différentes, qu'il peut y avoir de progressions arithmétiques différentes.

Soit par exemple la progression arithmétique dont la différence est 2,

1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.

On formera la série des nombres quarrés

1.4.9.16.25.36.49.64.81.100.

Si la différence de la progression arithmétique est 3, on aura

1.4.7.10.13.16.19.22.25.

et l'on formera la série des nombres pentagones

1.5.12.22.35.51.70.92.117.

Il est facile de trouver le terme général de ces sortes de séries, car il est égal à la somme de tous les termes correspondans de la progression arithmétique dont elle dérive.

Soit une progression arithmétique dont le premier terme est 1, la différence est d, et le nombre des termes n : la somme de tous les termes sera

$$(2+dn-d)\frac{n}{2}$$

ce sera le terme général de la série polygonale : si le rang du polygone est m, $d=m-2$, et mettant cette valeur de d dans l'expression du terme général, il deviendra

$$\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}.$$

Soit par exemple

$$m=5, \text{ et } n=6,$$

on aura le sixième terme des nombres pentagonaux $=51$.

126. Les différentes suites des nombres polygones, et des progressions arithmétiques dont elles dérivent, sont comprises dans le tableau suivant :

PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES.	SUITES DES NOMBRES POLYGONES.
2.3. 4. 5.....n...	1.3. 6.10.15.....$\frac{n.n+1}{2}$
3.5. 7. 9.....$2n-1$...	1.4. 9.16.25.....n^2
4.7.10.13.....$3n-2$	1.5.12.22.35....$n\frac{(3n-1)}{2}$
5.9.13.17.....$4n-3$	1.6.15.28.45...$n\,(2n-1)$
.....	.....
.....	.....
.....	.....
$1+d.1+2d.1+3d...1+dn-d$	$1.2+d.3+3d.(2+dn-d)\frac{n}{2}$.

127. On trouvera la valeur du terme sommatoire, ou la somme de tous les termes d'une suite de nombres polygones, par un raisonnement semblable à celui que l'on a employé pour les suites des nombres figurés. Soit S la somme de tous les termes d'une suite, $'S$ la somme du même nombre de termes diminué du dernier, c'est-à-dire, diminué du terme général, que l'on désignera par T: on aura évidemment

$$S = 'S + T.$$

Par exemple, dans la quatrième suite ci-dessus, la somme des cinq termes $1 + 6 + 15 + 28 + 45$ désignée par S, = la somme des quatre premiers, désignée par S; plus le dernier représenté par T: si l'on connoît la forme de S, on connoîtra celle de $'S$, et on connoît d'ailleurs celle de T; il n'y aura plus qu'à déterminer les coefficiens arbitraires, par la comparaison des termes.

Soit, par exemple, la série des nombres quarrés dont on demande la somme de tous les termes, n étant le nombre des termes. Le terme général est ici n^2, et le terme sommatoire sera de la forme suivante

$$A n^3 + B n^2 + Cn + D :$$

nous le représenterons par S; la somme des $n-1$ termes précédens, où S sera exprimée par

$$A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1) + D,$$

et on aura l'équation

$$A n^3 + B n^2 + Cn + D = A(n-1)^3 + B(n-1)^2 + C(n-1) + D + n^2 \ldots$$

ou en développant les binômes et réduisant

$$\begin{aligned} 3A.n^2 - 3A.n + A &= 0 \ldots \\ -1 + 2B. - B & \\ + C & \end{aligned}$$

ce qui donne

$$A = \frac{1}{3} \ldots B = \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{1}{6} \ldots \quad D = 0.$$

donc $$S = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \ldots \text{si } n = 5$$

on a $$S = \frac{125}{3} + \frac{25}{2} + \frac{5}{6} = \frac{330}{6} = 55.$$

Soit la suite des différentes puissances des nombres naturels

$$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m + 6^m + 7^m + \ldots + n^m.$$

Il est visible que le terme général d'une pareille

suite est n^m. La somme de tous les termes contiendra une puissance d'un degré plus élevé que le terme général, on pourra donc la représenter par

$$S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} \ldots + V$$
$$^1S = A(n-1)^{m+1} + B(n-1)^m + C(n-1) + D(n-1)^{m-2} + V$$

développant tous ces binomes, on a

$$^1S = A\left\{n^{m+1} - m+1.n^m + \frac{m+1.m}{2}n^{m-1}\right.$$
$$\left. - \frac{m+1.m.m-1}{2.3}n^{m-2}\ldots\right.$$
$$+ B\left\{n^m - mn^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}n^{m-2}\right.$$
$$\left. - \frac{m.m-1.m-2}{2.3}n^{m-3}\ldots\right.$$
$$+ C\left\{n^{m-1} - m-1.n^{m-2} + \frac{m-1.m-2}{2}n^{m-3}\ldots\right.$$
$$\left. - \frac{m-1.m-2.m-3}{2.3}n^{m-4}\ldots\right.$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituant les valeurs de S, ^1S et T dans l'équation $S = {}^1S + T$, on trouvera

$$A = \frac{1}{m+1}\ldots B = \frac{1}{2}\ldots C = \frac{m}{3.4}\ldots D = \ldots \text{etc.}$$

ce qui donne pour les premiers termes de la valeur de S

$$S = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{m.n^{m-1}}{3.4} + \ldots \text{ etc.}$$

Il est utile de remarquer que le premier terme

de la valeur de S, est le terme général n^m élevé à une puissance plus haute d'une unité, et divisée par l'exposant de cette puissance: et lorsque n sera plus grand que tout nombre assignable, tous les autres termes disparoîtront devant le premier; et l'on aura $S = \frac{n^{m+1}}{m+1}$.

Des séries récurrentes.

128. On nomme série, ou suite récurrente, toute suite dont le coefficient de chaque terme est égal à un certain nombre de coefficiens précédens, multipliés chacun par une quantité constante: on peut concevoir les suites récurrentes, comme dérivant des progressions géométriques, ou comme le développement d'une fraction rationnelle algébrique.

Soit en effet la fraction $\frac{a}{a-x}$, dont le développement est

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{a^5} \ldots \text{(}\textit{Algèb.}\text{ 123)}$$

Cette série est évidemment une progression géométrique, dont le quotient est $\frac{x}{a}$.

Soit la fraction

$$\frac{5+x}{1+x-2x^2}.$$

En la développant, on a la série

$$5 - 4x + 14x^2 - 22x^3 + 50x^4 - 94x^5 \ldots$$

On auroit de la peine à appercevoir d'abord les rapports de cette série avec les progressions géo-

métriques; mais si on décompose le dénominateur de la fraction en ses facteurs simples (*Algèb.* 127), on trouvera

$$\frac{5+x}{1+x-2x^2}=\frac{2}{1-x}+\frac{3}{1+2x}.$$

Chacune de ces deux fractions étant développée, donnera une progression géométrique, et la somme des deux formera la série première.

En effet

$$\frac{2}{1-x}=2\left\{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\ldots\right\}$$

$$\frac{3}{1+2x}=3\left\{1-2x+4x^2-8x^3+16x^4-32x^5\ldots\right\}$$

Les deux suites réunies donnent

$$5-4x+14x^2-22x^3+50x^4-94x^5\ldots$$

Toute fraction rationnelle développée en série par la méthode des coefficiens indéterminés, donnera une série récurrente; la fraction qu'on développe, est appelée fraction génératrice.

Soit la fraction

$$\frac{1+kx}{1+px+qx^2}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4\ldots$$

En faisant évanouir le dénominateur du premier membre, et comparant ensuite les termes qui sont multipliés par la même puissance de x (*Algèb.* 123), on aura, pour déterminer les coefficiens, les équations

$$A-1=0\ldots B+Ap-k=0\ldots C+Bp+Aq=0\ldots$$
$$D+Cp+Bq=0\ldots E+Dp+Cq=0\ldots \text{etc.}$$

où l'on voit que chaque coefficient, à partir du troisième, dérive des deux qui le précèdent immédia-

tement, multipliés par $-p-q$; c'est-à-dire, par les coefficiens des termes affectés de x dans le dénominateur de la fraction génératrice, pris avec des signes contraires. La quantité $-p-q$, est appelée l'échelle de relation.

129. Prenons une fraction génératrice très-générale, telle que la suivante

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+fx^4+\ldots+rx^{n-1}}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Fx^4+\ldots+Sx^n}$$

dans laquelle le dénominateur a, au moins, une dimension de plus que le numérateur : en la développant, on verra que les coefficiens de chaque terme, à commencer par celui du rang n, dépend d'un nombre n de coefficiens précédens, et que si on regarde le coefficient de chaque terme comme une fonction du nombre qui désigne le rang qu'il occupe, on pourra désigner celui du rang $m+n$, par $F(m+n)$: celui du rang précédent, par $F(m+n-1)$; celui qui précède celui-ci, par $F(m+n-2)$, et ainsi des autres : l'équation qui exprimera la dépendance des coefficiens, sera, d'après l'exemple précédent,

$$AF(m+n)+BF(m+n-1)+CF(m+n-2)$$
$$+DF(m+n-3)+\ldots+SF(m)=0.$$

Soit $F(m+n)=\beta^{m+n}$, β étant une nouvelle indéterminée qu'il s'agit de connoître : l'équation précédente deviendra

$$A\beta^n+B\beta^{n-1}+C\beta^{n-2}+D\beta^{n-3}+\ldots+S=0\ldots\ (1)$$

En comparant cette équation avec le dénominateur de la fraction génératrice, on voit que si on fait $\beta=\frac{1}{x}$ les deux fonctions deviennent identiques : donc

si α, α', α'', α'''... etc. sont les racines du dénominateur de la fraction génératrice égalé à zéro,

$$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha'}, \frac{1}{\alpha''}, \frac{1}{\alpha'''}\cdots$$

sont celles de l'équation (1), et que par conséquent, si on sait décomposer le dénominateur de la fraction génératrice en ses facteurs simples, on aura facilement les racines de celle-ci.

130. Occupons-nous maintenant de la recherche du terme général des séries récurrentes, et pour rendre la méthode plus simple et plus facile à saisir, appliquons-la à quelques exemples.

Soit la série résultante du développement de la fraction $\frac{1+kx}{1+px+qx^2}$:

si $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ sont les racines de l'équation du second degré $qx^2+px+1=0$, la fraction génératrice pourra se décomposer en deux fractions simples

$$\frac{A}{1-\alpha x}+\frac{B}{1-\beta x},$$

et la somme des deux séries résultant du développement de ces deux fractions sera égale à la série résultant du développement de la fraction proposée: donc le terme général de la série récurrente sera égal à la somme des deux termes généraux des séries résultant du développement des fractions simples; mais il est visible que le terme général de la série résultant de la fraction $\frac{A}{1-\alpha x}$ est $A\,\alpha^{n-1}x^{n-1}$, et celui de la série qui résulte du développement

de la série $\frac{B}{1-\beta x}$ est $B b^{n-1} x^{n-1}$; et les deux termes généraux sont ceux de deux progressions géométriques : donc la série récurrente qui résulte du développement de la fraction $\frac{1+kx}{1+px+qx^2}$ est égale à la somme de deux progressions géométriques.

Si le dénominateur de la fraction génératrice peut se décomposer en trois ou un plus grand nombre de facteurs simples, la série récurrente sera égale à la somme d'autant de progressions géométriques qu'il y aura de facteurs simples, et le terme général de la série récurrente sera égal à la somme des termes généraux de chaque progression géométrique.

Soit la fraction

$$\frac{1-z}{1-5z+6z^2},$$

qui donne par son développement la série

$$1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+\ldots$$

Le dénominateur de la fraction génératrice peut se décomposer en deux facteurs simples

$$(1-2z)\ (1-3z)\ :$$

donc la fraction se décomposera en ces deux fractions simples

$$\frac{A}{1-2z}+\frac{B}{1-3z}.$$

On trouvera, par les méthodes expliquées (*Algèb.* 127)

$$A=-1\ldots B=+2:$$

les deux fractions partielles seront donc

$$-\frac{1}{1-2x}+\frac{2}{1-3x}.$$

On a ici $\alpha=2$, et $\beta=3$:

donc le terme général de la série récurrente ci-dessus sera

$$(2\times 3^{n-1}-2^{n-1})\,x^{n-1}.$$

131. Si le dénominateur de la fraction génératrice avoit des facteurs égaux tels que $(1-\gamma x)^2$, le numérateur de la fraction partielle seroit nécessairement de la forme

$$a+bx\ldots\ (\textit{Algèb.}\ 123.)$$

et la fraction partielle seroit

$$\frac{a+bx}{(1-\gamma x)^2}=(a+bx)\,(1-\gamma x)^{-2}:$$

développant ce binôme, et multipliant par $a+bx$, on a les deux séries

$$a\{1+2\gamma x+3\gamma^2x^2+4\gamma^3x^3+\ldots\ldots\ldots\text{etc.}\}$$
$$+b\{0+\ x\ +2\gamma x^2+3\gamma^2x^3+4\gamma^3x^4\ldots\ldots\}$$

Le terme général de la première est évidemment

$$an\gamma^{n-1}x^{n-1};$$

celui de la seconde est

$$bn-1.\gamma^{n-2}x^{n-1},$$

et par conséquent les deux réunis seront de la forme

$$(M+Nn)\,x^{n-1}.$$

Soit la fraction partielle qu'il s'agit de développer

$$=\frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}=(1+4x+x^2)\,(1-x)^{-4},$$

on formera les trois séries

$$\begin{aligned} &1\{1+4x+10x^2+20x^3+\ldots\} \\ &+4\{0+\ x+\ 4x^2+10x^3+\ldots\} \\ &+1\{0+0+\ x^2+\ 4x^3\ldots\ldots\} \end{aligned}$$

Il est visible que la loi des coefficiens de ces trois séries est celle des nombres pyramidaux, et que par conséquent le terme général de la première est

$$\frac{n.n+1.n+2}{2.3};$$

celui de la seconde est

$$\frac{n-1.n.n+1}{2.3};$$

celui de la troisième est

$$\frac{n-2.n-1.n}{2.3}.$$

La somme des trois termes réunis sera visiblement de la forme

$$(M+Nn+Pn^2+Qn^3)x^{n-1}=\left(0+\frac{n}{2}+0+\frac{n^3}{2}\right)x^{n-1}.$$

Dans l'exemple proposé, en remarquant, toutefois, que la loi ne se manifeste qu'au quatrième terme, il est aisé de voir que si la fraction génératrice avoit un facteur de la forme $(1-\gamma x)^k$, le terme général de la série qui en résulteroit seroit de la forme suivante :

$$(M+Nn+Pn^2+Qn^3+\ldots+Tn^k)x^{n-1},$$

n étant toujours le nombre des termes.

132. Il reste à examiner le cas où la fraction génératrice auroit des facteurs simples imaginaires: on sait qu'en pareil cas les facteurs imaginaires sont

un nombre pair, et que pris deux à deux ils donnent un facteur réel du second degré (42). On aura donc une fraction partielle de cette forme

$$\frac{a+bx}{1+px+qx^2},$$

qu'on développera selon les règles ordinaires, et l'on s'assurera facilement que le terme général ne contiendra pas d'imaginaires, ou s'il en a en apparence, elles se détruisent mutuellement. (*Voyez* Euler, Introduction à l'Analyse, pag. 173.) Il résulte des considérations précédentes, que le terme général d'une série récurrente sera toujours la somme d'un nombre n de quantités exponentielles, faciles à trouver par la décomposition du dénominateur de la fraction génératrice en ses facteurs simples; et réciproquement, la somme d'un nombre d'exponentielles multipliées par des quantités constantes ou par des puissances de n, exprime toujours le terme général d'une série récurrente d'un ordre égal au nombre des termes dont est composé le terme général.

133. Proposons-nous maintenant le problême inverse: étant donnée une série récurrente, dont on connoît l'échelle de relation, trouver la fraction génératrice dont elle est développée.

La série récurrente étant représentée par

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5\ldots$$

si la relation entre les termes consécutifs T,S,R,Q, est donnée par l'équation

$$T+pS+qR+rQ=0,$$

le dénominateur de la fraction génératrice sera

$$1+px+qx^2+rx^3,$$

p, q, r étant des quantités connues, et son numérateur pourra être représenté par

$$a + bx + cx^2,$$

a, b, c étant des inconnues qu'il s'agit de déterminer; on aura donc l'équation

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+px+qx^2+rx^3} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots$$

Faisant évanouir la fraction, et comparant les termes semblables, comme si on vouloit déterminer $A, B, C, D\ldots$ on aura les trois équations

$$a = A, b = pA+B, c = qA+pB+C;$$

mais dans ces trois équations tout est connu dans les seconds membres : donc a, b, c seront déterminés.

Prenons pour exemple la série

$$5 - 4x + 14x^2 - 22x^3 + 50x^4\ldots$$

dont l'équation de relation est

$$T + S - 2R = 0;$$

c'est-à-dire que chaque terme est égal à deux fois le terme qui le précède de deux rangs, moins celui qui le précède immédiatement... Le dénominateur de la fraction génératrice sera donc

$$1 + x - 2x^2\ldots$$

et le numérateur sera exprimé par $a+bx$: on aura donc

$$\frac{a+bx}{1+x-2x^2} = 5 - 4x + 14x^2 - 22x^3 + 50x^4\ldots$$

Faisant évanouir la fraction, on aura

$$a+bx=5+5.x+\ldots$$
$$-4$$

donc $a=5, b=1$; et la fraction qui, développée, a donné la série, sera

$$\frac{5+x}{1+x-2x^2}\ (128).$$

Nous n'en dirons pas davantage sur les séries récurrentes; leur théorie ne peut être bien développée qu'en employant le calcul aux différences finies : notre but étoit de faire appercevoir leur analogie avec les progressions géométriques. Nous terminerons ici ce que nous avions à dire sur l'Analyse.

APPLICATION

DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

134. L'APPLICATION de l'Algèbre à la Géométrie a pour objet de faire servir les méthodes de l'Analyse à la détermination d'un ou de plusieurs points d'après des conditions données; si le nombre des conditions est insuffisant pour fixer la position du point dans l'espace, le problême est alors indéterminé; c'est-à-dire, qu'il existe plusieurs points auxquels les conditions données peuvent convenir également: par exemple, si on demande la position d'un point qui soit à une distance donnée d'un autre point pris dans l'espace, il est visible que cette condition convient à tous les points de la surface d'une sphère dont le point donné est le centre: si on y ajoute une seconde condition; par exemple, que le point qu'on cherche soit dans un plan donné, alors les deux conditions ne conviennent qu'à la circonférence d'un cercle dont le point donné est le centre. Enfin si on veut que ce point soit à une distance donnée de trois plans connus, sa position est tellement déterminée, qu'il n'est plus possible de le confondre avec un autre point pris dans l'espace.

135. La position respective de ces trois plans est absolument arbitraire; mais pour plus de simplicité, on les suppose perpendiculaires entr'eux: les distances du point à chacun de ces plans sont appelées *coordonnées*, et les intersections mutuelles des plans

plans sont les axes des coordonnées qui leur sont parallèles.

Si une des conditions nécessaires pour déterminer la position du point est qu'il soit dans un des trois plans donnés, il suffira de satisfaire à deux autres conditions pour déterminer la distance du point donné à l'intersection de deux plans avec celui sur lequel se trouve le point en question.

Ces deux conditions sont données ordinairement par des équations algébriques, exprimant des rapports déterminés entre ces deux distances.

Lorsque le nombre d'équations est égal à celui des inconnues, le problême est déterminé; toutes les quantités qui entrent dans les équations sont connues ou inconnues, mais invariables, et la position du point cherché ne dépend plus que des constructions semblables à celles dont nous nous sommes occupés dans les notes sur la Géométrie (tome 2, page 194). Si le nombre des inconnues est plus grand que celui des équations qui établissent leur rapport avec les quantités connues, le problême est susceptible de plusieurs solutions; c'est-à-dire que la position du point est indéterminée, parce qu'il y en a plusieurs dans l'espace qui jouissent des propriétés assignées par les équations.

Les quantités inconnues qui entrent dans les équations sont appelées variables, parce qu'elles sont susceptibles d'une infinité de valeurs différentes: les quantités données sont appelées constantes par opposition à celles qu'on nomme variables.

La somme de tous ces points liés entr'eux par une même loi forme une ligne droite ou courbe, et la description de cette ligne ainsi que la connoissance de ses principales affections, est l'objet dont nous allons nous occuper.

136. La manière de représenter toutes les solu-

tions d'une équation indéterminée à deux variables par le moyen d'une courbe consiste à tracer deux lignes XX', YY', qu'on nomme axes, faisant entr'elles un angle quelconque, mais communément droit, à prendre sur l'axe XX', au-dessus et au-dessous de l'axe YY', un nombre arbitraire de grandeurs AP, AP'... AP, qu'on suppose représenter autant de valeurs de l'indéterminée désignée par x, et à mener ensuite par chaque point P, P'... parallèlement à YY' une ligne PM, $P'M'$... qui représente les valeurs de l'indéterminée, désignée par y, correspondantes aux valeurs données à x : on trace ensuite par les extrémités de toutes ces lignes PM, $P'M'$, une ligne, droite ou courbe, dont chaque point fournit une solution de l'équation exprimant en x et y le rapport des lignes AP et PM.

Fig. 1.

L'équation exprimant le rapport de x à y est nommée l'équation de la courbe... La courbe est appelée le lieu géométrique de l'équation... Les lignes AP, désignées par x, sont appelées les abscisses ; et les lignes PM, désignées par y, sont les ordonnées : le point A, où les deux axes XX', YY' se coupent, est l'origine des coordonnées.

Les coordonnées sont positives ou négatives, suivant qu'elles sont prises à droite ou à gauche des axes ; on commence par fixer le côté des abscisses positives à partir de l'origine des coordonnées, et le côté négatif sera pris dans le sens opposé : par exemple, si on est convenu de compter les abscisses positives dans la direction AX, les négatives seront dans la direction AX'. Si les ordonnées positives sont dans la direction AY, les négatives seront dans la direction AY' ; en sorte que les points de la courbe qui se trouvent dans l'angle XAY, ont des abscisses positives et des ordonnées posi-

tives; ceux qui sont dans l'angle XAY', ont des abscisses positives et des ordonnées négatives; ceux qui se trouvent dans l'angle YAX', ont des abscisses négatives et des ordonnées positives; ceux enfin qui se trouvent dans l'angle $Y'AX'$, ont des abscisses négatives et des ordonnées négatives.

137. Le premier objet de l'analyse appliquée à la théorie des courbes est de former leurs équations d'après les conditions qui les déterminent: par exemple, la circonférence $XYX'Y'$ étant une ligne dont tous les points sont également éloignés du centre, il est facile d'en conclure que si un rayon quelconque AM est appelé a, si l'ordonnée MP est appelée y, et l'abscisse correspondante AP est désignée par x, la condition dont il s'agit donne, par la propriété du triangle rectangle, Fig. 2.

$$y^2 + x^2 = a^2;$$

et parce que cette équation ne contient d'autres puissances de x et y que les quarrés, il s'ensuit qu'elle restera la même, soit qu'on prenne les coordonnées toutes deux positives ou toutes deux négatives, ou l'une des deux positive et l'autre négative.

138. Toute équation à deux variables x et y peut être représentée généralement par $F(x,y)=0$; on peut ensuite par les méthodes de l'analyse, dégager x ou y, et l'on aura pour lors

$$x = f.y, \text{ ou } y = \varphi.x;$$

F, f, φ étant des signes abstraits représentant des fonctions connues de x et y, de y, ou de x seulement (1).

(1) Cette manière d'exprimer les fonctions d'une ou plusieurs variables par des signes abstraits est très-générale,

Toutes les propriétés d'une courbe se déduisent de son équation ; les conséquences les plus immédiates qu'on en tire sont relatives à la forme générale et à l'étendue de la courbe : on peut d'abord examiner à quel point elle coupe l'axe des abscisses et celui des ordonnées, dans quel angle des axes sa trace existe, si elle est fermée ou si elle se prolonge à l'infini... etc.

139. Les courbes ont été classées d'après la nature des équations dont elles sont les lieux géométriques ; on a nommé lignes du premier ordre celles dont l'équation entre les coordonnées x et y est du premier degré : les lignes du second ordre sont celles dont l'équation est du second degré, et ainsi des autres.

140. L'équation la plus générale du premier degré et à deux variables est $y = ax \pm b$, dans laquelle y et x sont les deux variables, et a et b deux constantes, qui sont censées déterminées.

Pour connoître le lieu géométrique de cette équation, prenons deux lignes droites qui se coupent à angles droits XX', YY' : Fig. 3.

soit $$MP = y, AP = x...$$

---

et présente de grands avantages : on peut voir dans la géométrie de Legendre l'usage qu'il en fait pour démontrer d'une manière très-simple et indépendante de toute autre proposition préliminaire les propositions fondamentales de la géométrie ; elle a été aussi employée par Laplace pour la démonstration des principes fondamentaux de la mécanique. Lagrange s'en est servi dans un grand nombre de circonstances (*Voyez* la Théorie des fonctions analytiques) ; et c'est en partie à cette forme générale d'écrire les fonctions, qu'on doit l'élégance et la généralité de ses démonstrations

il est visible qu'au point où la ligne $R'M$ coupe l'axe des ordonnées, on a

$$x = 0 :$$

donc pour déterminer le point L, on fera $x = 0$ dans l'équation, et l'on aura la valeur de l'ordonnée correspondante

$$AL = \pm b \ldots$$

Au point où la ligne $R'M$ coupe l'axe des abscisses, on a $y = 0$;

donc pour déterminer le point R', on fera $y = 0$ dans l'équation, et l'on aura

$$x, \text{ ou } AR' = \mp \frac{b}{a}.$$

L'équation générale du premier degré peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{y}{x \pm \frac{b}{a}} = a,$$

c'est-à-dire, que pour un point quelconque M, on a

$$\frac{PM}{AP \pm AR'}, \text{ ou } \frac{PM}{PR'} = a,$$

et par conséquent le rapport de $PM : PR'$, est un rapport constant, quelle que soit la valeur de y et x; donc ce rapport a lieu pour toute l'étendue de la ligne MR' : or cette propriété est celle qui caractérise les triangles semblables, donc la ligne $R'M$ ne peut être qu'une ligne droite.

On voit encore que rien ne limite le cours de cette ligne droite, c'est-à-dire, qu'en donnant à x telle valeur qu'on voudra, soit positive, soit négative, y aura toujours une valeur réelle : lorsqu'on

donnera à x une valeur positive, celle de y sera toujours positive, si b est une quantité positive ; mais lorsque la valeur de x sera négative, c'est-à-dire lorsqu'elle sera prise dans la direction AR', la valeur de y sera encore positive, tant qu'on aura $ax < b$, c'est-à-dire, dans toute l'étendue AR' : mais si l'on a $ax > b$, la valeur de y sera négative, c'est-à-dire, qu'elle tombera de l'autre côté de l'axe des abscisses: la ligne droite $R'M'$ sera donc dans l'angle $X'AY'$.

Si l'équation est $y = ax - b$, en faisant $x = 0$,

on a $$y = -b :$$

Fig. 3. donc le point L', où la ligne coupe l'axe des ordonnées, se trouvera du côté opposé : en faisant $y = 0$,

on a $$x = \frac{b}{a} :$$

donc le point R, où la ligne coupe l'axe des abscisses est du côté positif ; la ligne droite $L'R$ sera dans l'angle $Y'AX$.

Si l'équation est $y = b - ax$, en faisant $x = 0$,

on a $$y = b ;$$

Fig. 4. donc le point L où la ligne coupe l'axe des ordonnées est du côté positif : si on fait $y = 0$, on a

$$x = \frac{b}{a},$$

donc le point R où la ligne coupe l'axe des abscisses est du côté positif : la ligne RL sera dans l'angle YAX.

Enfin si l'équation est

$$y = -ax - b,$$

ou $$y + ax + b = 0,$$

en faisant $x = 0$, on a

$$y = -b :$$

donc le point L' où la ligne coupe l'axe des ordonnées est du côté négatif; en faisant $y = 0$, on trouve

$$x = -\frac{b}{a} :$$

donc le point R' où la ligne coupe l'axe des abscisses est du côté négatif, et par conséquent la ligne $L'R'$ est dans l'angle $X'AY'$.

Toutes les fois que dans l'équation

$$y \pm ax \pm b = 0,$$

on connoîtra a et b, la position de la ligne droite RL sera déterminée : mais si a et b étoient indéterminées, il faudroit les déterminer par deux conditions particulières, telles par exemple que d'assujettir la ligne droite à passer par deux points dont la position, par rapport aux deux axes, est connue ; ou à être parallèle, ou perpendiculaire à une ligne donnée, et à passer par un point donné.

141. Supposons qu'on cherche l'équation de la ligne droite MN, qui passe par deux points donnés K, K' dont les abscisses AP, AP' sont m, n, et les ordonnées KP, $K'P'$ sont p, q : on mettra successivement dans l'équation générale, les deux premières valeurs m, n à la place de x, et les deux dernières p, q à la place de y, et l'on aura ainsi les deux équations particulières, Fig. 5.

$$p = am + b \ldots q = an + b,$$

dans lesquelles a et b sont les inconnues : en retranchant la première de la seconde, on a

$$a = \frac{q - p}{n - m} :$$

multipliant la première par n, la seconde par m et retranchant, on a

$$b = \frac{np - mq}{n - m};$$

si on représente ces deux valeurs, ainsi déterminées, par a', b', on aura l'équation

$$y = a'x + b'$$

dont la construction donnera la position de la ligne qui doit passer par les deux points donnés.

Fig. 6. 142. Deux lignes RK, ST rapportées aux mêmes axes YY', XX', dont les coordonnées ont une même origine A, et qui se coupent en un point O, ont à ce point d'intersection une même abscisse AM, et une même ordonnée MO, en sorte que pour déterminer le point d'intersection, on n'a qu'à supposer que les inconnues x et y sont les mêmes dans les équations des deux lignes

$$y = ax + b \ldots\ y = a'x + b',$$

ce qui donne, par les règles connues de l'algèbre,

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}\ y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}.$$

On peut remarquer ici que les deux lignes RK, ST ne peuvent se rencontrer qu'en un point, puisqu'on ne trouve pour x et y qu'une seule valeur, ce qui est d'ailleurs évident : on voit aussi la raison pour laquelle les équations numériques du premier degré à deux inconnues n'ont qu'une seule solution, quoique chaque équation en particulier en ait autant que la ligne droite a de points. Le point de rencontre de deux lignes droites RK, ST sera d'autant plus éloigné, que les deux coefficiens a, a' approcheront plus de l'égalité ; et si ces

deux coefficiens étoient égaux, les deux lignes RK, ST seroient parallèles : d'où il suit que pour mener une ligne parallèle à une ligne donnée, et passant par un point déterminé et connu, il suffit de déterminer la constante b' par la condition particulière que la ligne donnée doit passer par un point déterminé : le coefficient a' étant donné par la position de la première ligne. Les coefficiens a, a' désignent les tangentes des angles S, R, donc lorsque les lignes ST, KR sont parallèles, ces deux angles sont égaux, ce qui est une des propositions fondamentales de la théorie des parallèles.

143. Nous avons considéré, jusqu'ici, les axes des coordonnées perpendiculaires entr'eux, parce que c'est la position la plus simple; cependant il est quelquefois utile de supposer que les axes font entr'eux un angle quelconque, mais connu, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant la position des axes, leur inclinaison mutuelle, et l'origine des coordonnées. Avant d'embrasser le cas général, nous allons examiner ces divers changemens chacun séparément.

144. Soit une équation donnée

$$F(x,y) = 0$$ Fig. 7.

qu'il s'agit de construire : supposons d'abord que les axes auxquels on veut rapporter le lieu géométrique de cette équation soient perpendiculaires entr'eux; que l'origine des coordonnées soit en B, et qu'on veut la transporter en B' dont la position, par rapport aux axes AB, DB, est connue, en conservant toujours la même position respective à ces deux axes.

Soit $B'C = \alpha$, $B'C' = \beta$...

les ordonnées $MP = y$, les abscisses $BP = x$:

ayant mené par le point B' deux nouveaux axes $B'D'$, $B'A'$ parallèles aux premiers, il est visible que l'ordonnée MP' rapportée au nouvel axe $=y-\alpha$, et l'abscisse correspondante $B'P'=x-\beta$: soient ces deux nouvelles coordonnées y', x': on aura

$$y=y'+\alpha, \text{ et } x=x'+\beta:$$

substituant ces valeurs dans l'équation $F(x,y)=0$, elle deviendra

$$F(x'+\beta, y'+\alpha)=0$$

dans laquelle les deux variables x', y' seront les nouvelles coordonnées.

145. Supposons actuellement que l'axe $B'D'$ prenne la position $B'D''$, faisant avec $B'D'$ un angle donné $D'B'D''=\varphi$; et que l'axe $B'A'$ prenne la position $B'A''$ en restant perpendiculaire sur $B'D''$, c'est-à-dire que l'angle $A'B'A''=\varphi$: ayant mené du même point M une ordonnée MP'' perpendiculaire sur le nouvel axe, nous la désignerons par y'', et l'abscisse correspondante $B'P''$, par x''.

Le triangle $P''MQ$ est semblable au triangle $P''B'N$, donc l'angle $P''MQ=\varphi$, et l'on a

$$MQ=y''\cos\varphi \ldots P''Q=y''\sin\varphi \ldots$$
$$P''N=x''\sin\varphi \ldots B'N=x''\cos\varphi \ldots$$

donc

$$MP'=MQ+P''N=y''\cos\varphi+x''\sin\varphi,$$
et $B'P'=B'N-P''Q=x''\cos\varphi-y''\sin\varphi$:

ces valeurs étant substituées dans

$$F(x'+\beta, y'+\alpha)=0,$$

on aura une nouvelle fonction en x'', y'' de même degré que la première. On voit aussi que si on substitue dans l'équation proposée

$$\alpha + y'' \cos\varphi + x'' \sin\varphi,$$

à la place de y, et $\beta + x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi$ à la place de x, on changera par une seule opération l'origine des abscisses et la position des axes, en les conservant néanmoins perpendiculaires entr'eux.

146. Si on veut supposer que les deux axes $A''B'$, $D''B'$ ne sont pas perpendiculaires entr'eux, et qu'ils font un angle $A'''B'D'' = \downarrow$, alors les coordonnées $B'P'''$, MP''' se rencontreront sous un angle $MP'''P'' = \downarrow$, et si on fait $MP''' = y'''$, $B'P''' = x'''$, on aura

$$y'' = y''' \sin\downarrow, \text{ et } x'' = x''' + y''' \cos\downarrow :$$

substituant ces valeurs dans la dernière expression de y et x, et réduisant, on trouvera que les substitutions les plus générales pour x et y sont

$$y = \alpha + y''' \sin(\varphi + \downarrow) + x''' \sin\varphi \ldots$$
$$x = \beta + y''' \cos(\varphi + \downarrow) + x''' \cos\varphi.$$

L'angle

$$(\varphi + \downarrow) = D'B'D'' + D''B'A''' = A'''B'D'.$$

Soit cet angle ω, son sinus $= m$, son cosinus $= n$, le sinus de l'angle $\varphi = p$, son cosinus $= q$, on aura

$$y = \alpha + my''' + px''' \ldots x = \beta + ny''' + qx'''.$$

Telle est l'expression qui représente la valeur de y et x, lorsqu'on fait dans leurs positions respectives tous les changemens possibles. Nous ferons souvent usage de cette expression, il est nécessaire d'avoir une idée exacte des quantités qui la composent; c'est pourquoi nous allons les faire connoître plus particulièrement.

α est la quantité constante qui détermine la position de l'origine des nouvelles coordonnées par rapport à l'axe BD; β est la quantité constante

qui détermine la position de la même origine par rapport à l'axe BA : φ est l'angle que le nouvel axe des abscisses fait avec le premier, p en est le sinus, et q le cosinus. ω est l'angle que le nouvel axe des ordonnées fait avec le premier axe des abscisses $B'D'$, c'est l'angle $A''B'D'$, il est la somme des deux

$$D'B'D'' = \varphi, \text{ et } D''B'A''' = \psi,$$

qui est l'angle que les deux nouveaux axes des coordonnées $B'D''$ et $A'''B'$ font entr'eux : le sinus de ω est désigné par m, et son cosinus par n.

Si l'on supposoit les nouvelles coordonnées parallèles aux premières, et qu'on ne fît que changer l'origine, on auroit l'angle $\varphi = 0$ et l'angle $\omega =$ un angle droit : donc

$$y = \alpha + y''' \ldots \text{ et } x = \beta + x''' :$$

comme on n'a que des abscisses et des ordonnées rapportées à deux axes différens, à comparer entr'elles, on n'a pas besoin de marquer x et y de plusieurs accents, il suffit d'écrire

$$y = \alpha + y', \text{ et } x = \beta + x'.$$

En égalant à zéro α ou β, on conservera à sa place un des deux axes AB, ou BD ; c'est-à-dire que l'origine des coordonnées sera transportée de B en C, ou en C'.

Si on ne veut que changer la direction des axes, on fera

$$\alpha = 0 \ldots \beta = 0,$$

et on aura

$$y = my' + px' \ldots \text{ et } x = ny' + qx'.$$

Veut-on changer seulement la direction de l'axe $A'B'$, on fera $p=0$, et par conséquent $q=1$: donc $y = my'$, et $x = x' + ny'$.

Si c'est la direction de $B'D'$ qu'on veut changer, en conservant à MP' la même direction, on fera

$$n = 0, \text{ et } m = 1 :$$

donc $$y = y' + p x', \; x = q x'.$$

Enfin si les nouvelles coordonnées doivent être perpendiculaires entr'elles comme les premières, on aura

$$\omega = 90° + \varphi ;$$

donc $$m = q, \text{ et } n = -p,$$

ou $$y = q y' + p x', \text{ et } x = q x' - p y'.$$

Réciproquement si on a l'équation d'une courbe rapportée à deux axes faisant entr'eux un angle connu $A'''B'D'' = \psi$; on pourra la rapporter à deux axes perpendiculaires entr'eux AB, BD.

On prendra pour cela les deux équations

$$y - \alpha = m y' + p x' \ldots \; x - \beta = n y' + q x' \ldots$$

On multipliera la première par q, et la seconde par p, et retranchant l'une de l'autre, on aura

$$(y - \alpha) q - (x - \beta) p = (mq - np) y' \ldots$$

d'où on déduit

$$y' = (y - \alpha) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} - (x - \beta) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.$$

Multipliant la première par n, et la seconde par m, et retranchant l'une de l'autre, on a

$$(x - \beta) m - (y - \alpha) n = (mq - pn) x' :$$

donc

$$x' = (x - \beta) \frac{\sin \omega}{\sin \psi} - (y - \alpha) \frac{\cos \omega}{\sin \psi}$$

On doit remarquer que dans toutes les transformations, les premières coordonnées sont toujours

des fonctions linéaires de celles qu'on introduit, et par conséquent l'équation transformée sera toujours du même degré que la proposée.

147. Nous allons entrer dans quelque détail sur les lignes du second ordre, dont l'équation générale peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + dx + f = 0.$$

Fig. 7. Supposons que cette équation exprime le rapport des coordonnées rapportées aux deux axes AB, BD, perpendiculaires entr'eux, et qu'on veut la transformer en une autre équation exprimant le rapport des coordonnées, rapportées aux deux axes $A'''B'$, $B'D''$ faisant avec les deux premiers des angles connus : en substituant pour x et y les valeurs déjà trouvées (146), on aura l'équation

$$Ay'^2 + Bx'^2 + Cx'y' + Dx' + Fy' + G = 0,$$

dans laquelle on a fait pour abréger,

$$A = m^2 + an^2 + bmn$$
$$B = p^2 + aq^2 + bpq$$
$$C = 2mp + 2anq + bmq + bnp$$
$$D = 2\alpha p + 2a\beta q + \alpha bq + \beta bp + cp + dq$$
$$F = 2\alpha m + 2a\beta n + \alpha bn + \beta bm + cm + dn$$
$$G = \alpha^2 + a\beta^2 + \alpha\beta b + \alpha c + \beta d + f.$$

L'équation précédente pourra être mise sous la forme

$$y^2 + Py + Q = 0,$$

en supprimant les accens, et faisant

$$\frac{Cx + F}{A} = P, \quad \frac{Bx^2 + Dx + G}{A} = Q \ldots$$

— P étant la somme des racines de l'équation, et Q le produit des mêmes racines (5).

148. On nomme centre d'une courbe un point C, tel que si on mène par ce point une ligne droite d'une position arbitraire et dont les deux extrémités sont sur deux points opposés de la courbe, ce point divise la ligne droite en deux parties égales. Fig. 8.

Toute ligne AB, qui passant par le centre divise en deux parties égales les ordonnées mn, pq, parallèles entr'elles, est appelée diamètre : si le diamètre coupe les ordonnées à angle droit, il prend le nom d'axe. Le mot axe est pris ordinairement dans un sens plus étendu : on donne ce nom à toute ligne tracée dans le plan de la figure, et à laquelle se rapporte l'équation, comme on l'a vu plus haut (136).

On appelle axe des abscisses, la ligne sur laquelle se prennent les abscisses, et axe des ordonnées, une ligne parallèle aux ordonnées, et passant par un point déterminé.

En résolvant l'équation

$$y^2 + Py + Q = 0$$

par rapport à y, on a

$$y = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q} \qquad (1).$$

La valeur de y est composée de deux parties, savoir celle qui est hors du radical, et celle qui est sous le radical.

La première $= -\left(\frac{Cx + F}{2A}\right)$ est une fonction linéaire de x; et si on la suppose $= u$, on aura l'équation

$$u + \frac{Cx + F}{2A} = 0,$$

Fig. 9. équation à la ligne droite RM, ayant les mêmes axes XX', YY', et la même origine des abscisses A que la courbe : si l'on fait $x = 0$, on a

$$u = -\frac{F}{2A};$$

c'est la valeur de AL : la supposition de $u = 0$, donne

$$x = -\frac{F}{C};$$

c'est la valeur de AR : la position de la ligne RM est donc déterminée par la valeur des coefficiens A, C, F.

Si dans l'équation (1) on fait $y - u = z$, on aura

$$z = -\sqrt{\frac{p^2}{4} - Q};$$

or $\quad y - u = PK - PS = SK,$

on a aussi

$$+ u - y = SP - PK' = -z =$$
$$-\sqrt{\frac{p^2}{4} - Q};$$

donc les ordonnées SK, SK' prises de part et d'autre de la ligne RM sont égales, ce qui prouve que RM est un diamètre.

On peut supposer que l'origine des coordonnées est sur un point de la courbe, pour lors on a $y = 0$, lorsque $x = 0$, et le dernier terme de l'équation G, $= 0$. La ligne XX', et le diamètre RM se confondent, si

$$\frac{CX + F}{2A}, \text{ ou } PS, = 0,$$

indépendamment

indépendamment de la valeur de x : donc pour que les deux lignes se confondent, il faudra faire séparément

$$C = 0,\ F = 0\ldots$$

Les trois équations $G = 0$, $C = 0$, $F = 0$ serviront à déterminer les quantités α, β et ϕ, ou $\frac{p}{q}$, pour que l'origine des abscisses soit sur un point de la courbe, et pour que la ligne XX' soit un diamètre : lorsque ces trois conditions seront remplies, l'équation de la courbe deviendra

$$y^2 + \frac{Bx^2 + Dx}{A} = 0.$$

149. Cette équation est susceptible de trois formes différentes : la première a lieu, lorsque $B = 0$; la seconde, lorsque $\frac{B}{A}$ est positif ; la troisième, lorsque $\frac{B}{A}$ est négatif. Nous ne parlons pas du cas où $D = 0$, parce qu'on a pour lors

$$y = \pm x\sqrt{\frac{\pm B}{A}}$$

équation à la ligne droite, lorsque B est négatif, ce qui indique que l'équation donnée appartient au système de deux lignes droites qui se coupent à l'origine des abscisses, parce qu'on a en même temps pour les deux lignes $y = 0$, et $x = 0$.

L'équation $C = 0$ donne

$$\frac{p}{q} = -\left(\frac{2an + bm}{2m + bn}\right).$$

Cette valeur substituée dans celle de B, donne

$$\frac{B}{A} = \frac{(4a - b^2)q^2}{(2m + bn)^2};$$

et il est visible 1°. que $B = 0$, lorsque $a = \frac{b^2}{4}$;

2°. que $\frac{B}{A}$ est positif, lorsqu'on a

$$a > \frac{b^2}{4};$$

3°. que B est négatif, lorsqu'on a

$$a < \frac{b^2}{4};$$

les deux premières hypothèses indiquent que $\frac{D}{A}$ doit être d'un signe contraire à celui de x, pour que les valeurs de y soient réelles.

Il suit de tout ce qui précède, que la connoissance du signe, et de la valeur des coefficiens des trois premiers termes de l'équation proposée

$$y^2 + ax^2 + bxy + \ldots = 0 \quad (147),$$

suffit pour distinguer les trois espèces de courbes qu'elle peut représenter : le premier cas donne l'espèce de courbes qu'on nomme *paraboles*; le second cas donne celles qu'on nomme *ellipses*, et le troisième, les *hyperboles*.

Fig. 9-8-10.

Observons encore que les conditions de

$$a = \frac{b^2}{4},\ a > \frac{b^2}{4},\ \text{et}\ a < \frac{b^2}{4}$$

indiquent que l'équation formée par les trois premiers termes de la proposée

$$y^2 + a x^2 + b x y = 0$$

peut se décomposer dans le premier cas, en deux facteurs simples égaux; dans le second, en deux facteurs simples imaginaires, et dans le troisième, en deux facteurs simples réels et inégaux : donc lorsque l'équation formée par les termes de la proposée contenant y^2, x^2, xy, aura ses deux racines égales, le lieu géométrique de la proposée sera une parabole; lorsque les deux racines seront réelles et inégales, le lieu géométrique de la proposée sera une hyperbole; il sera une ellipse, si ses deux racines sont imaginaires.

L'équation

$$y^2 + \frac{B x^2 + D x}{A} = 0$$

est indépendante de l'angle ω que font entr'eux les deux axes $B' A'''$, $B' D'$, donc elle convient également à tous les diamètres, et par conséquent à celui sur lequel les ordonnées sont perpendiculaires, et qu'on nomme particulièrement axe (136). Fig. 7.

Lorsque le coefficient $B = A$, l'équation devient

$$y^2 = \frac{D}{B} x \pm x^2 :$$

cette équation est celle du cercle, en prenant le signe négatif pour x^2 : or $B = A$, si on a

$$\varphi = 0, \omega = 90°, \text{ et } a = 1;$$

car dans ces suppositions, on a

$$p = 0, q = 1 \ldots m = 1, n = 0,$$

ce qui donne $A=B$: mais la supposition de $\varphi=0$, et $\omega=90^\circ$ apprend que les deux axes ou diamètres primitifs sont perpendiculaires entr'eux; et la supposition de $a=1$, apprend que le coefficient du terme x^2 doit être le même que celui de y^2 : donc lorsque ces deux conditions sont remplies, l'ellipse dégénère en cercle : si on prend le signe positif pour x^2, on a l'équation à l'hyperbole dite équilatère.

On pourroit aussi faire disparoître à la fois de l'équation les termes

$$Ay^2, Bx^2, Dx, Fy,$$

en supposant

$$A=0, B=0, D=0, E=0,$$

au moyen desquelles on déterminera convenablement les indéterminées

$$\alpha, \beta, \frac{p}{q}, \frac{m}{n}, t$$

on auroit alors l'équation

$$Cxy+G=0,$$

que nous verrons être encore à l'hyperbole, en sorte que quelle forme que prenne l'équation générale du second degré, son lieu géométrique sera une des quatre courbes désignées parabole, ellipse, cercle, hyperbole.

Ces courbes ont été nommées *sections coniques* parce qu'elles sont formées par la section faite dans un cône par un plan coupant : c'est sous ce dernier point de vue que les ont considérées les anciens géomètres, qui ont découvert un grand nombre de théorêmes sur leur nature et leurs propriétés : Descartes, Newton, ont observé qu'elles formoient la classe entière des courbes du premier ordre, ou

lignes du second ordre. Avant de les considérer chacune en particulier, nous allons reprendre l'équation générale, pour en déduire quelques propriétés remarquables, communes à toutes les courbes.

150. Reprenons l'équation

$$Ay^2 + Bx^2 + Cxy + Dx + Fy + G = 0 \quad (1)$$

et mettons-la sous la forme

$$y^2 + Py + Q = 0. \quad (147):$$

cette dernière équation peut se décomposer en deux facteurs

$$(y \pm M)(y \pm M') = 0,$$

et pour lors on a

$$-P = \pm(M + M') \quad \text{et} \quad Q = MM':$$

la première de ces deux équations nous apprend généralement que dans toute courbe représentée par l'équation générale du second degré, le coefficient P ou $-\frac{(Cx+F)}{A}$ est égal à la somme ou à la différence des racines $PM + Pm$, répondant à la même abscisse $AP = x$, d'où il suit que si on prend une nouvelle abscisse $AP' = x'$, et qu'on mène les deux ordonnées $P'M', P'm'$, on aura pareillement Fig. 11.

$$P'M' + P'm' = -\left(\frac{Cx' + F}{A}\right):$$

retranchant la somme des deux premières ordonnées $PM + Pm$ de cette dernière, on a

$$P'M' - PM + P'm' - Pm = \frac{C}{A}(x - x');$$

ou $$M'N - m'n = -\frac{C}{A} PP';$$

et par conséquent le rapport de $M'N - m'n : PP'$ est constant, et le même que celui de $C : A$: ainsi quelle que soit la position des deux droites $M\,m$, $M'\,m'$, par rapport à la courbe, pourvu qu'elles soient parallèles entr'elles, et que les deux droites $M\,N$, $m\,n$ soient parallèles à l'axe, le rapport de la somme ou de la différence des deux lignes $M'N$, $m'n : PP'$ sera constant.

151. Supposons que l'origine des coordonnées soit transportée dans la courbe, par exemple en D, ce que l'on pourra toujours obtenir, en faisant

Fig. 12.

$$x = x' \pm \alpha \ldots y = y' \pm \beta :$$

il n'en résultera de changement dans l'équation générale, que dans la valeur des coefficiens C, D, F, G, qu'on changera en $C', D', F', G' \ldots$ A et B ne changeront pas de valeur, parce qu'ils ne renferment pas α, ni β : cela posé,

Lorsqu'on fait $x = 0$, on a

$$y'^{n} + \frac{F'}{A} y' + \frac{G'}{A} = 0,$$

et par conséquent

$$Dm \times Dn = \frac{G'}{A};$$

si on fait $y = 0$, on a

$$x'^{n} + \frac{D}{B} x' + \frac{G'}{B} = 0,$$

et par conséquent

$$DO \times DL = \frac{G'}{B},$$

d'où on déduit

$$\frac{Dn \times Dm}{DO \times DL} = \frac{B}{A};$$

c'est-à-dire que si une ligne droite KL rencontrant une ligne du second ordre $O\,n\,L\,B\,m$ en deux points O, L, est elle-même coupée par plusieurs lignes droites $m\,n$, $m'\,n'$ parallèles entr'elles, le rectangle des deux ordonnées relatives à la même abscisse $D\,n \times D\,m$, ou $D'\,m' \times D'\,n'$ est au rectangle des deux parties de l'axe des abscisses comprises entre l'ordonnée et les points où cet axe coupe la courbe $D\,O \times D\,L$, ou $D'\,O \times D'\,L$, comme $B : A$, c'est-à-dire en raison constante.

Dans le cercle, on a $B = A$, donc

$$D\,m \times D\,n = D\,A \times D\,B. \qquad \text{Fig. 13.}$$

Si le point D est hors du cercle, par exemple en D', et que la position des axes soit telle qu'ils coupent tous les deux le cercle, le théorême que nous venons de démontrer n'en sera pas moins vrai, parce que dans l'équation générale du cercle on a toujours $A = B$, quel que soit l'angle d'inclinaison des axes; on aura donc, dans ce cas,

$$D'\,n' \times D'\,m' = D'\,A' \times D'\,B',$$

ce qu'on connoît déjà par les élémens de géométrie.

152. Les coefficiens A, B ne contiennent d'autres variables que les sinus et cosinus des angles ω et φ : donc tant que ces angles ne changeront pas, le rapport de $Dn \times Dm : DO \times DL$ sera le même, d'où il suit que si deux parallèles $m\,n$, $m'n'$ sont coupées par deux autres parallèles $O\,L$, $O'L'$, savoir la première $m\,n$ par la troisième $O\,L$, et la seconde $m'\,n'$ par la quatrième $O'\,L'$, le rectangle $Dn \times Dm$: au rectangle $DO \times OL$ :: le rec- Fig. 14.

tangle $D'n' \times D'm'$; au rectangle $D'O' \times D'L'$.

153. On a vu (149) que l'équation de la parabole rapportée à l'axe ou au diamètre est

$$y^2 - \frac{D}{A}x = 0\ldots$$

celle de l'ellipse

$$y^2 - \frac{Dx + Bx^2}{A} = 0\ldots;$$

celle de l'hyperbole,

$$y^2 - \frac{Dx - Bx^2}{A} = 0, \text{ et } xy - \frac{F}{C} = 0,$$

si on la rapporte aux asymptotes : nous avons obtenu ces formes par la transposition des axes ; on parviendroit au même but, et d'une manière plus directe, par le moyen du théorême démontré (151).

En effet une des propriétés des diamètres, est de couper les ordonnées en deux parties égales : donc
Fig. 18. la proportion $pi \times po : mp \times pn :: B : A$, donnera, en faisant

$$pi = po, = y, mp = x, pn = \frac{D}{B} - x$$

$$y^2 = \frac{B}{A}\left(\frac{D}{B}x - x^2\right);$$

c'est-à-dire

$$y^2 - \frac{Dx + Bx^2}{A} = 0;$$

il en seroit de même pour les autres courbes.

On peut encore rapporter aux propriétés générales des courbes, la manière de déterminer leurs tangentes, leurs soutangentes, leurs normales, leurs

sous-normales, leur courbure... etc. Mais il sera plus simple d'examiner ces propriétés dans chaque courbe en particulier.

De la parabole.

154. On a vu que l'équation à la parabole rapportée à l'axe ou à un diamètre, est

$$y^2 = \frac{D}{A}x,$$ Fig. 15.

ou en faisant

$$\frac{D}{A} = p, y^2 = px;$$

c'est-à-dire que le quarré de l'ordonnée à l'axe ou à un diamètre, est égal au produit de l'abscisse correspondante, comptée du point où l'axe coupe la courbe, par une quantité constante désignée par p, et qu'on nomme le *paramètre*.

Il suit de l'équation de la courbe que les ordonnées à l'axe Ap, ou à un diamètre BC, sont coupées en deux parties égales par l'axe, ou le diamètre : il y a pourtant cette différence entre l'axe et le diamètre, que les ordonnées pM à l'axe lui sont toujours perpendiculaires, tandis que les ordonnées bd au diamètre sont plus ou moins inclinées sur leur diamètre : nous ne parlerons, pour le moment, que des propriétés de la courbe rapportée à l'axe.

Plus les abscisses augmentent, plus le quarré des ordonnées augmentera : donc la parabole est une courbe ouverte qui ne revient jamais sur elle-même; et puisque de l'équation à l'axe on tire $y = \pm\sqrt{px}$, il s'ensuit qu'elle a deux rameaux égaux, l'un à droite de l'axe, AM, l'autre à gauche AB. Si on

prend une seconde ordonnée à l'axe $M'p' = y'$, répondant à une abscisse $Ap' = x'$, on aura

$$y'^2 = p\,x' :$$

cette équation et la précédente $y^2 = p\,x$ donnent la proportion $y^2 : y'^2 :: x : x'$.. et $y^2 = \frac{y'^2 x}{x'}$: d'où il suit que si dans une parabole donnée, on connoît une ordonnée quelconque, et l'abscisse correspondante, on pourra trouver toutes les autres.

Pour déterminer cette première ordonnée, on prend un point fixe f sur l'axe, distant du sommet de la courbe d'une quantité $= \frac{p}{4}$: on aura donc

$$x' = \frac{p}{4} \text{ et } y'^2 = \frac{p^2}{4}$$

ou

$$2y' = p :$$

donc la double ordonnée passant par le point de l'axe éloigné du sommet de la courbe d'une quantité égale à $\frac{p}{4}$, sera elle-même égale à p. Ce point de l'axe ainsi déterminé est appelé *le foyer*, et la double ordonnée $m\,b$ passant par le foyer, est égale au paramètre de la courbe : ce paramètre, ou cette mesure constante sert à fixer le rapport entre la hauteur et l'amplitude de la parabole : en donnant à p différentes valeurs, on a l'équation d'autant de paraboles différentes, d'où il suit que le paramètre est une quantité constante dans chaque parabole, mais variable, en passant d'une parabole à l'autre.

155. Toute ligne FM menée du foyer à un point quelconque de la courbe, est appelée *rayon vecteur*; et si par un point D de l'axe, autant

éloigné du sommet de la courbe que ce même sommet l'est du foyer f, on mène la ligne RS, perpendiculaire à l'axe, le rayon vecteur fM sera égal à la distance MR du point M de la courbe à cette perpendiculaire. En effet, on a

$$\overline{fM}^2 = \overline{pM}^2 + \overline{fp}^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2$$

$$= px + x^2 - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16} = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2 \ldots$$

donc $fM = x + \frac{p}{4} = pA + AD = MR.$

La perpendiculaire RS est nommée la directrice, et il suit de la propriété qu'on vient de démontrer, que si de chaque point de la courbe on décrit un cercle d'un rayon égal au rayon vecteur, tous ces cercles passeront par le foyer et toucheront la directrice en un point.

156. Si du foyer on mène une ligne droite au point R, et que d'un point M on abaisse une perpendiculaire ML sur cette ligne fR, elle touchera la courbe au point M; car 1°. cette perpendiculaire ML aura le point M également éloigné de R et f, par la nature de la courbe; donc elle passera par le milieu de fR, et tous ses autres points seront également éloignés de f et R: donc au point H, par exemple, on aura

$$HR = Hf,$$

mais $$HR > HK,$$

donc $$Hf > HK;$$

et par conséquent le point H de la ligne ML n'appartient pas à la courbe: donc la ligne $TLMH$

n'a qu'un point de commun avec la courbe, donc elle est tangente.

157. Puisque la ligne ML divise la ligne fR en deux parties égales, elle divise aussi l'angle fMR en deux également ; donc on a

$$fML = OMH:$$

donc l'angle fML formé par le rayon vecteur et la tangente est égal à l'angle OMH formé par la ligne MR prolongée et la tangente: mais au point M la direction de la courbe est la même que celle de la tangente LM, donc c'est encore une propriété de la parabole que l'angle formé par le rayon vecteur et la courbe à un point quelconque soit égal à l'angle formé par la courbe et une parallèle à l'axe au même point.

La partie pT de l'axe comprise entre une ordonnée pM et le point de rencontre de la tangente avec l'axe est nommée sous-tangente ; le point M étant donné, il est visible que la position de la tangente sera déterminée si on peut assigner un second point par où elle doit passer : donc la longueur de la soutangente suffira pour déterminer la position de la tangente.

158. Si par un point M de la courbe, on mène une perpendiculaire MQ à la tangente, cette perpendiculaire sera nommée normale ; et la partie de l'axe pQ comprise entre l'ordonnée au même point et la normale est appelée sous-normale : le point M étant donné, la position de la normale sera déterminée si on peut assigner un second point par où elle doit passer ; d'où il suit que la longueur de la sous-normale suffit pour déterminer la normale.

La méthode générale pour déterminer la tangente à un point donné d'une courbe est un pro-

blême des plus difficiles et des plus intéressans de la géométrie des courbes : Descartes, Fermat, Barrow, Leibnitz, Newton s'en sont occupés. Leurs méthodes très-ingénieuses laissoient quelque chose à desirer pour la généralité et la précision jusqu'à la découverte du calcul différentiel, à laquelle ils avoient préludé : nous déterminerons par ces méthodes, les tangentes, sous-tangentes, normales, sous-normales des lignes du second ordre, pour mettre le lecteur dans le cas de les apprécier, et le préparer d'avance aux applications du calcul différentiel et intégral ; et comme ces méthodes s'appliquent également à toutes sortes de courbes, nous attendrons d'avoir fait connoître les propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole, pour résoudre le problème des tangentes d'une manière générale.

De l'ellipse.

159. L'équation de l'ellipse rapportée à son axe ou à un diamètre, est

$$y^2 = \frac{Dx - Bx^2}{A} \quad (149),$$

qu'on peut mettre sous la forme suivante :

$$y^2 = \frac{B}{A}\left\{\frac{D}{B}x - x^2\right\}.$$

On voit 1°. dans cette équation que chaque valeur de x, y a deux valeurs égales, une positive PM, et l'autre négative PM' : donc la courbe a deux rameaux égaux, l'un à droite, et l'autre à gauche de l'axe des abscisses. 2°. Si on fait $y = 0$, on a deux valeurs pour x, savoir ; Fig. 16.

$$x = 0, \text{ et } x = \frac{D}{B} :$$

donc la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points A et B, et par conséquent elle est une courbe fermée ; si on donne à x une valeur plus grande que $\frac{D}{B}$, les valeurs de y sont imaginaires ; il en est de même si x a des valeurs négatives, donc la courbe ne s'étend pas au-delà des points A et B : si on suppose que les coordonnées PM, AP, sont perpendiculaires entr'elles, $\frac{D}{B}$ sera la valeur de l'axe AB de l'ellipse ; si les coordonnées font entr'elles un angle qui ne soit pas droit, $\frac{D}{B}$ sera un diamètre.

Soit l'axe $AB = 2a$; par le milieu de AB menons l'ordonnée Ck, que nous désignerons par b... on aura $b^2 = \frac{B}{A}a^2$,

et par conséquent $\frac{b^2}{a^2} = \frac{B}{A}$;

donc $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$:

l'ordonnée kC passant par le milieu de l'axe AB est nommée *l'axe conjugué*, ou le petit axe de l'ellipse, par analogie avec AB, qu'on nomme le grand axe.

On peut aussi supposer la quantité constante $\frac{D}{A} = p$, comme dans la parabole, et $\frac{D}{B} = 2a$, ce qui donnera à l'équation la forme suivante

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a} \ldots$$

Les deux formes que nous venons de voir sont également usitées dans les ouvrages de mathématiques; la première a pour constantes les deux axes de l'ellipse, la seconde dépend du paramètre et du grand axe : en comparant entr'elles les deux équations, on voit que pour qu'elles soient identiques, il faut que $p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a}$; c'est-à-dire que le paramètre de l'ellipse est toujours une troisième proportionnelle entre le grand axe et le petit axe.

On peut encore donner à l'équation de l'ellipse rapportée au grand axe une forme plus commode, en plaçant l'origine des abscisses sur le milieu du grand axe, que nous nommerons le centre; on aura pour lors $CP = z$,

et par conséquent

$$x = a - z, \quad \text{et } 2a - x = a + z;$$

donc l'équation ci-dessus deviendra

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2).$$

Si l'on suppose que $b = a$, les deux axes de l'ellipse sont égaux, et la courbe devient un cercle dont l'équation est $y^2 = a^2 - z^2$ (137).

160. Soit pris un point fixe F sur le grand axe, tel que sa distance à l'extrémité du petit axe k soit égale à la moitié du grand axe; nommons c la distance de ce point au centre : l'on aura en se servant de l'équation rapportée au centre

$$\overline{Fm}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - b^2);$$

or $a^2 - c^2 = b^2$, par la construction ;

donc $\overline{Fm}^2 = \frac{b^4}{a^2}$, et $Fm = \frac{b^2}{a}$:

donc $$m\,m' = \frac{2\,b^2}{a} = p.$$

Le paramètre est donc le double de l'ordonnée qui passe par le point F; ce point est appelé le foyer de l'ellipse, et comme il est visible qu'il y a un second point f à la même distance de k et L que le point F, ce point f sera un second foyer : les distances FC, fC des foyers au centre de l'ellipse, sont nommées *l'excentricité;* la distance d'un foyer à l'autre est la double excentricité.

Les foyers de l'ellipse sont très-remarquables par leurs propriétés; la principale est que la somme de leurs distances à un même point de la courbe est toujours égale au grand axe. En effet, on a

$$\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2 = (c - z)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2)$$

$$= c^2 - 2\,c\,z + z^2 + \frac{a^4 - a^2 z^2 - a^2 c^2 + c^2 z^2}{a^2};$$

(en mettant $a^2 - c^2$ à la place de b^2), réduisant tout au même dénominateur, et effaçant les termes qui se détruisent,

$$\overline{FM}^2 = \left(\frac{a^2 - c\,z}{a}\right)^2;$$

donc $$FM = a - \frac{c\,z}{a}.$$

Par un calcul semblable, on trouvera

$$f\overline{M}^2 = f\overline{P}^2 + \overline{PM}^2 = (c + z)^2 + \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - z^2);$$

et

et en développant,

$$= \left(\frac{a^2 + cz}{a}\right)^{\frac{1}{2}};$$

donc $$fM = a + \frac{cz}{a};$$

si on prend la somme des deux rayons vecteurs, on aura $$FM + fM = 2a.$$

161. Si on prolonge le rayon vecteur fM jusqu'en O, de manière que $MO = MF$, et qu'on joigne FO, la ligne menée du point M perpendiculairement sur FO, sera tangente à la courbe au point M : car 1°. elle aura le point M commun avec la courbe; 2°. elle n'aura que ce point de commun avec la courbe; car à tout autre point H de la tangente on aura

$$HF = HO, \text{ et } fH + HO > fM + MO,$$

et par conséquent

$$> fM + MF;$$

donc le point H de la tangente n'appartient pas à la courbe.

162. La partie de l'axe PT est la soutangente; l'angle FMO est partagé en deux parties égales par la tangente MT: on a donc

$$FMT = TMO = fMH;$$

ainsi les deux angles que les deux rayons vecteurs menés au même point de la courbe, font avec la tangente ou avec la courbe, sont égaux entr'eux.

Si par un point M de l'ellipse, on mène une ligne MR, qui divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs MF, Mf, cette

ligne sera normale à l'ellipse au point M : car l'on a

1°. $$FMT = fMH,$$

propriété déjà démontrée ;

2°. $$FMR = RMf,$$

par la supposition ; donc

$$TMR = RMH,$$

et par conséquent RM est perpendiculaire sur la tangente au point M : la partie de l'axe comprise entre l'ordonnée MP et la normale MR, sera la sous-normale.

De l'hyperbole.

163. L'équation à l'hyperbole rapportée à son axe ou aux diamètres, est

Fig. 17. $$y^2 = \frac{B}{A}\left(\frac{D}{B}x + x^2\right).$$

Cette équation présente des propriétés analogues à celles de l'ellipse; 1°. dans cette courbe pour chaque valeur de x, y a deux valeurs égales, l'une positive, et l'autre négative : donc la courbe a deux rameaux égaux, l'un BM à droite de l'axe, l'autre BN à gauche du même axe; 2°. si l'on fait $y = 0$, on a deux valeurs pour x, savoir

$$x = 0, \text{ et } x = -\frac{D}{B} :$$

donc la courbe coupe l'axe à l'origine B, et en un autre point A pris du côté opposé, éloigné de B de la quantité $BA = \frac{D}{B}$.

La ligne $B\,A$ qui est l'axe de l'hyperbole, étant désignée par $2\,a$, comme dans l'ellipse, on aura

$$\frac{D}{B} = 2\,a,$$

et si par un point C, milieu de $A\,B$, on mène la perpendiculaire $D\,d$, telle que $\overline{CD}^2 = \frac{B}{A}\,a^2$, en nommant cette ligne $C\,D$, b, on aura

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{B}{A};$$

donc l'équation de l'hyperbole rapportée à l'axe, sera

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\,(2\,a\,x + x^2).$$

Si on fait $\frac{D}{A} = p$, on aura

$$y^2 = p\,x + \frac{p\,x^2}{2\,a};$$

et si on compte l'origine des abscisses du point C, et qu'on mette $z - a$ à la place de x, et $z + a$ pour $2\,a + x$, on aura

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(z^2 - a^2\right):$$

ces trois formes différentes sont à-peu-près les mêmes que celles que nous avons trouvées pour l'ellipse, elles n'en diffèrent que dans le signe.

En comparant les deux premières entr'elles, on a, comme dans l'ellipse,

$$p = \frac{2\,b^2}{a};$$

$Dd=2b$ sera appelé le petit axe de l'hyperbole, ou l'axe conjugué, par analogie à celui de l'ellipse.

Si dans l'équation rapportée au centre, on prend z positif ou négatif, mais $< a$, on trouve pour y^2 une valeur négative, et pour y, deux valeurs imaginaires : donc la courbe n'a point de branches ni de rameaux depuis le point B, jusqu'au point A : si on prend z négative et $> a$, on retrouve les mêmes valeurs que pour z positive : donc la courbe a, du côté opposé, une branche $N'AM'$ égale à la première, dont le sommet est au point A.

Dans les deux branches, plus l'abscisse CP, CP' augmente, plus l'ordonnée correspondante PM, $P'M'$ augmente, ce qui prouve que l'hyperbole est composée de deux branches MBN, $M'AN'$, placées de part et d'autre de l'axe ; chaque branche ayant deux rameaux qui partent d'un sommet commun B et A, et s'étendent indéfiniment et en sens opposé, par rapport à l'axe.

164. Si on prend ici, comme dans l'ellipse, deux points F, f dont la distance au point C soit désignée par c, et que des points B, A, on porte cette distance de part et d'autre sur Dd, on aura

$$Cd^2 = dB^2 - CB^2, \quad \text{ou} \quad b^2 = c^2 - a^2 :$$

le quarré de l'ordonnée qui passe par le point F, ou

$$\overline{Fm}^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(c^2 - a^2\right) = \frac{b^4}{a^2}, \text{ et } Fm = \frac{b^2}{a},$$

donc
$$mm' = \frac{2b^2}{a} = p ;$$

le paramètre est donc ici comme dans l'ellipse, la double ordonnée qui passe par le point F, ou f.

Ces deux points seront les foyers de l'hyperbole ;

la distance FC sera l'exentricité, et Ff, la double excentricité.

Dans l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs est égale au grand axe : en effet on a

$$\overline{FM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{FP}^2 = \frac{b^2}{a^2}(z^2 - a^2) + (z-c)^2,$$

et en mettant $c^2 - a^2$ à la place de b^2, et réduisant on a

$$\overline{FM}^2 = \left(\frac{cz - a^2}{a}\right)^2 :$$

donc
$$FM = \frac{cz}{a} - a :$$

on aura aussi

$$fM = \frac{cz}{a} + a :$$

donc
$$fM - FM = 2a.$$

165. Si on prend sur le rayon vecteur fM une partie $Mo = FM$, et qu'on joigne Fo, la ligne menée du point M perpendiculairement sur Fo sera tangente à la courbe au point M : 1°. elle aura le point M commun avec la courbe : 2°. elle n'aura que ce point, car à tout autre point H de la tangente, on a

$$FH = Ho, \text{ et } fH - FH = fH - Ho :$$

mais
$$fH < fo + Ho,$$

donc
$$fH - Ho < fo,$$

et par conséquent

$$fH - FH < fo :$$

donc le point H n'appartient pas à la courbe.

La partie de l'axe PT comprise entre l'ordonnée

PM et le point où la tangente rencontre l'axe, est la sous-tangente. L'angle FMo est partagé en deux parties égales par la tangente MT: on a donc

$$FMT = SMH..$$

ainsi le rayon vecteur FM, et le prolongement de l'autre rayon vecteur mené au même point, font des angles égaux avec la courbe, ou la tangente menée au point où les deux rayons vecteurs se rencontrent.

Si par un point M de la courbe on mène la ligne MR qui divise en deux parties égales l'angle FMS formé par le rayon vecteur FM et par le prolongement du second, cette ligne sera normale à l'hyperbole; car l'on a, comme dans l'ellipse,

1°. $$FMT = SMH,$$

2°. $$RMS = RMF:$$

donc les deux angles RMH, RMT sont droits: la ligne PR sera la sous-normale.

Si on suppose que $b^2 = a^2$, l'équation devient

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

et l'hyperbole est appelée équilatère, pour les raisons que nous verrons (184).

Des centres et des diamètres des lignes du second ordre.

166. Nous avons déjà dit (148) ce que l'on entend par centre et diamètre dans une ligne courbe: nous allons examiner à quel caractère on reconnoîtra si une courbe a un centre, et comment on peut le déterminer dans les lignes du second ordre.

Pour qu'une courbe ait un centre, il faut qu'en

supposant l'origine placée dans le centre, et prenant deux abscisses opposées et égales, les ordonnées correspondantes soient négatives et égales : l'équation doit donc être telle par rapport à x et y, qu'en changeant les signes des coordonnées, elle demeure la même : donc si cette équation est d'un degré pair, elle ne devra contenir que des termes où la somme des exposans de x et y soit un nombre pair, et si elle est d'un degré impair, elle ne devra contenir que des termes dont la somme des exposans des deux coordonnées soit impair.

167. Soit donc l'équation générale du second degré

$$y^2 + ax^2 + bxy + cy + dx + f = 0.$$

Les courbes représentées par cette équation auront un centre, si en transportant l'origine des abscisses à ce centre, les termes cy, dx peuvent devenir zéro : pour faire cette transposition, il suffira de supposer

$$x = \alpha + x', y = \beta + y' \qquad (144)$$

la transformée deviendra

$$Ay'^2 + Bx'^2 + Cx'y' + Dx' + Fy' + G = 0,$$

et l'on aura

$$A = 1 \ldots B = a \ldots C = b \ldots$$
$$D = 2\alpha a + \beta b + d \ldots F = 2\beta + \alpha b + c \ldots$$
$$G = \beta^2 + a\alpha^2 + b\alpha\beta + c\beta + \alpha d + f.$$

La supposition de $Fy' = 0$, $Dx' = 0$, donne les deux équations

$$2\alpha a + \beta b + d = 0 \ldots 2\beta + \alpha b + c = 0 \ldots$$

d'où on déduit

$$\alpha = \frac{bc - 2d}{4a - b^2} \ldots \beta = \frac{bd - 2ac}{4a - b^2}.$$

168. Dans la parabole, on a généralement

$$4a = b^2 \ (149) :$$

Fig. 15-16-17. donc α et β deviennent infinis ; c'est-à-dire que la parabole n'a pas de centre, ou si l'on veut, son centre est à une distance infinie de l'origine des abscisses.

Dans l'ellipse $4a > b^2$, et dans l'hyperbole $4a < b^2$, donc les deux courbes ont un centre.

Il suit de ce que nous venons de dire, que pour déterminer le centre des courbes, il faut faire

$$x = \alpha + x', \ y = \beta + y' :$$

on déterminera ensuite α et β par la condition qu'il ne reste plus dans la transformée que des termes de dimension paire, ou de dimension impaire : si la courbe a un centre, on trouvera pour α et β des valeurs réelles.

169. Puisque dans les lignes du second ordre, la propriété des diamètres est qu'à chaque abscisse prise sur le diamètre, l'ordonnée positive est égale à l'ordonnée négative (148), il s'ensuit que pour déterminer la position des diamètres, il faudra supposer $= 0$ les termes contenant y à la première puissance ; on fera donc dans l'équation transformée

$$C x + F = 0 ;$$

et comme cette équation est du premier degré, les diamètres qu'elle désigne sont des lignes droites ;
Fig. 8. supposons la droite AB un de ces diamètres ; l'équation devra être vérifiée dans toute son étendue, c'est-à-dire, qu'il faudra qu'elle ait lieu, quelle que soit la valeur de x : donc on aura

$$C = 0 \ldots F = 0$$

chacun séparément ; la première donne

$$\frac{p}{q} = \pm \frac{2an + bm}{2m + bn};$$

la seconde donne

$$\frac{m}{n} = -\frac{2a\beta + \alpha b + d}{2\alpha + b\beta + c};$$

ce qui détermine les angles φ et ω qui conviennent à chaque diamètre.

En substituant dans la première équation la valeur de $\frac{m}{n}$ prise dans la seconde, on a

$$\frac{p}{q} = -\left(\frac{2a + b\frac{m}{n}}{2\frac{m}{n} + b}\right) = \frac{(b^2 - 4a)\alpha + bd - 2ac)}{(b^2 - 4a)\beta + bc - 2d)}$$

170. Dans la parabole on a

$$b^2 - 4a = 0,$$

donc $\frac{p}{q}$, ou tang $\varphi = \frac{bd - 2ac}{bc - 2d}$;

et par conséquent la tangente de l'angle φ ne dépend que des coefficiens a, b, c, d de l'équation proposée, tandis que $\frac{m}{n}$, ou tang ω dépend des indéterminées α, β qu'on introduit dans l'équation, en changeant l'origine des abscisses : donc 1°. dans la parabole l'angle φ est constant, ou ce qui revient au même, tous les diamètres BC, MO sont parallèles entr'eux, et par conséquent à AP qui est lui-même un diamètre : 2°. les ordonnées aux diamètres $d\,b$, $d'\,b'$ couperont chacune leur diamètre sous un an- Fig. 15.

gle différent, qui dépendra de la position des points B, M.

Dans l'ellipse et l'hyperbole, la tang φ dépendra
Fig. 18 de α et β, et par conséquent sera variable, ainsi que
et 17. la tang ω.

171. Pour rendre ces observations plus sensibles, prenons l'équation à la parabole rapportée à l'axe $y^2 = k x$: pour la rapporter à un diamètre quelconque, on fera

Fig. 15. $y = \alpha + m y' + p x'$, et $x = \beta + n y' + q x'$: ce qui donnera

$$m^2 y'^2 = (kq - 2\alpha p) x' + (kn - 2\alpha m) y' - 2mp x' y' - p^2 x'^2 + k\beta - \alpha^2.$$

La ligne qu'on prend pour l'axe des abscisses sera un diamètre, si l'on a

$$2mp = 0, \text{ et } kn - 2\alpha m = 0.$$

La première donne $p = 0$, et par conséquent $q = 1$, ce qui apprend que l'angle $\varphi = 0$, ou que le diamètre est parallèle à l'axe : on tire de la seconde, en l'élevant au quarré,

$$k^2 (1 - m^2) = 4\alpha^2 m^2, \text{ ou } m^2 = \frac{k^2}{4\alpha^2 + k^2}.$$

Pour que l'origine des nouvelles abscisses soit sur un point de la courbe, il faut que

$$k\beta - \alpha^2 = 0, \text{ ou } \alpha^2 = k\beta :$$

substituant cette valeur de α^2 dans celle de m^2, on a

$$m^2 = \frac{k}{4\beta + k}, \text{ et } \frac{k}{m^2} = 4\beta + k \ldots$$

donc $y'^2 = (4\beta + k) x' = k' x'$,

en faisant

$$4\beta + k = k'.$$

La quantité k est le paramètre de la parabole, dans l'équation rapportée à l'axe : si on transporte l'origine des abscisses de A en B, on a

$$A r = \beta,$$

donc

$$4\beta + k = 4.BS.$$

et par conséquent le paramètre de la courbe dans l'équation rapportée au diamètre, est égal à quatre fois la distance de l'origine des abscisses, à la directrice.

L'équation à l'ellipse est

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2): \qquad \text{Fig. 18.}$$

en conservant l'origine des coordonnées au centre, et faisant $y = my' + px' \ldots x = ny' + qx'$, on aura la transformée

$$\left(m^2 + \frac{b^2}{a^2}n^2\right)y'^2 + \left(2mp + 2\frac{b^2}{a^2}nq\right)x'y' + \left(p^2 + \frac{b^2}{a^2}q^2\right)x'^2 - b^2 = 0:$$

pour que l'équation soit rapportée au diamètre cm, il faut que $2mp + 2\frac{b^2}{a^2}nq = 0$, ce qui donne

$$\frac{p}{q} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{n}{m}. \qquad (1)$$

Par le centre c menons le diamètre cR parallèle à la tangente menée par le point m.

Soit ensuite l'angle $Rc\,A = \mu$, on aura

$$Rc\,D, \text{ ou } \omega = 90 + \mu,$$

et par conséquent

$$m = \cos\mu \ldots n = -\sin\mu..$$

l'équation (1) deviendra donc

$$\frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\mu} = \frac{b^2}{a^2};$$

où l'on voit que le rapport des tangentes des angles $m\,c\,D$, $A\,c\,R$ est constant, quoique chaque angle en particulier soit variable. L'ellipse a donc une infinité de diamètres.

Le diamètre $c\,R$ parallèle à la tangente menée par le point m, et le diamètre $c\,m$, sont appelés *diamètres conjugués :* chaque diamètre de l'ellipse a son conjugué.

Quand on connoît le grand axe et le petit axe de l'ellipse, et l'angle φ qu'un diamètre dont la position est connue, fait avec un des axes, on trouvera facilement la position de son conjugué : car l'équation $\frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\mu} = \frac{b^2}{a^2}$, donne

$$\text{tang}\,\mu = \frac{a^2}{b^2}\,\text{tang}\,\varphi\ldots.$$

on connoîtra donc l'angle μ que le diamètre conjugué fait avec l'axe $c\,A$.

Si l'angle $m\,c\,D = \varphi$ devient $K\,c\,D = 90 - \mu$, c'est-à-dire si l'angle $A\,c\,K = A\,c\,R$, l'angle que le diamètre conjugué fait avec l'axe $A\,c$, deviendra $A\,c\,R'$, et sera égal à $90 - \varphi$: en effet

$$\text{tang}\,K\,c\,D = \cot A\,c\,K = \cot \mu,$$

et si l'on fait

$$\text{tang}\,A\,c\,R' = \text{tang}\,90 - \varphi = \cot \varphi;$$

on aura

$$\frac{\text{tang}\,K\,c\,D}{\text{tang}\,A\,c\,R'} = \frac{\cot \mu}{\cot \varphi} = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{tang}\,\mu} = \frac{b^2}{a^2}$$

comme cela doit être d'après l'équation (1);

L'angle $RcA = RcA + AcA = \mu + 90 - \varphi$...

L'angle $R'cK = R'cA + AcK = 90 - \varphi + \mu$: donc les deux diamètres conjugués cK, cR', font entr'eux le même angle que les deux cA, cR : il existe donc dans l'ellipse deux diamètres différens, qui font le même angle avec leurs conjugués.

Après avoir fait évanouir dans l'équation transformée le terme contenant xy, on aura pour l'équation de l'ellipse rapportée à un diamètre quelconque

$$y^2 = \frac{a^2p^2 + b^2q^2}{a^2m^2 + b^2n^2}\left\{\frac{a^2b^2}{a^2p^2 + b^2q^2} - x^2\right\}$$

Si l'on fait $a^2p^2 + b^2q^2 = a^2m^2 + b^2n^2$, l'équation de l'ellipse sera rapportée à deux diamètres conjugués égaux.

Pour que l'on ait $a^2p^2 + b^2q^2 = a^2m^2 + b^2n^2$, il faut que $m = p$, et $n = -q$, c'est-à-dire que l'angle ω doit être $180° - \varphi$: ces valeurs substituées dans l'équation (1) donnent

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{b^2}{a^2}, \text{ ou } \frac{p}{q} = \frac{b}{a}:$$

c'est-à-dire que les deux diamètres conjugués égaux, doivent être parallèles aux deux lignes AD, AD' menées du point A aux deux extrémités du petit axe : ils feront donc chacun avec le grand axe un angle DAc, dont la tangente est $\frac{b}{a}$; celle de l'angle RcK que les deux diamètres conjugués égaux font entr'eux, est $\frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

172. Soit le diamètre $cm = g$, son conjugué cR

$= f$: si dans l'équation au diamètre on fait $x = 0$, on aura

$$f^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 + b^2 n^2}.$$

Si l'on fait dans la même équation $y = 0$, on aura

$$g^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 p^2 + b^2 q^2};$$

donc l'équation à l'ellipse rapportée au diamètre, pourra être mise sous la forme

$$y^2 = \frac{f^2}{g^2}(g^2 - x^2),$$

équation parfaitement semblable à l'équation rapportée à l'axe.

L'équation à l'hyperbole rapportée à l'axe, est

Fig. 19.

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right);$$

en supposant, comme pour l'ellipse, $y = my' + px' \ldots x = ny' + qx'$, on a

$$\left(m^2 - \frac{b^2}{a^2}n^2\right)y'^2 + \left(2mp - 2\frac{b^2}{a^2}nq\right)x'y'$$

$$+ \left(p^2 - \frac{b^2}{a^2}q^2\right)x'^2 + b^2 = 0.$$

On fera ensuite

$$2mp - 2\frac{b^2}{a^2}nq = 0 \quad (1),$$

et l'équation au diamètre deviendra

$$y^2 = \frac{b^2 q^2 - a^2 p^2}{a^2 m^2 - b^2 n^2}\left\{x^2 - \frac{a^2 b^2}{b^2 q^2 - a^2 p^2}\right\}.$$

Soit

$$\frac{a^2 b^2}{b^2 q^2 - a^2 p^2} = g^2, \text{ .. et } \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 - b^2 n^2} = f^2 :$$

substituant ces valeurs, on aura

$$y^2 = \frac{f^2}{g^2}(x^2 - g^2) :$$

équation parfaitement semblable à celle rapportée à l'axe.

173. L'équation (1) donne

$$\frac{p}{q} = \frac{b^2}{a^2}\frac{n}{m},$$

et si l'on fait comme dans l'ellipse, l'angle $R\,c\,d = \mu$, on aura

$$R\,c\,A', \text{ ou } \omega = 90° - \mu :$$

donc

$$\frac{\text{tang } \varphi}{\text{tang } \mu} = \frac{b^2}{a^2};$$

ce qui apprend 1°. que les deux diamètres conjugués $c\,M$, $c\,R$ sont dans le même angle $A'\,c\,d$; 2°. que le rapport des tangentes des deux angles $M\,c\,A' = \varphi$, $R\,c\,d = \mu$ est constant, mais chaque angle en particulier est variable, et par conséquent l'hyperbole a une infinité de diamètres.

174. L'angle $R\,C\,P$ dans l'ellipse et l'hyperbole a été désignée par $\downarrow$ (146), il est égal à $\omega - \varphi$. Fig. 19-20.

Donc

$$\sin \downarrow = m\,q - n\,p,$$

et par conséquent

$$f^2 g^2 \sin^2 \downarrow = \frac{a^4 b^4 (m\,q - n\,p)^2}{(a^2 m^2 \pm b^2 n^2)(b^2 q^2 \pm a^2 p^2)}$$

$$= a^2 b^2 \left\{ \frac{a^2 b^2 m^2 q^2 - 2\,a^2 b^2 m\,n\,p\,q + a^2 b^2 n^2 p^2}{a^2 b^2 m^2 q^2 \pm 2\,a^4 m^2 p^2 + a^2 b^2 n^2 p^2} \right\};$$

mais $\pm 2\,a^4 m^2 p^2 = -2\,a^2 b^2 m n p q$, en vertu de l'équation (1),

donc $$fg \sin \downarrow = ab :$$

or le premier membre de cette équation $= cR \times Po$, Fig. 20. ou la surface du parallélogramme $RcPF$ formé par les deux diamètres conjugués, et les tangentes qui leur sont parallèles; donc dans l'ellipse et l'hyperbole, un pareil parallélogramme est égal en surface au rectangle formé par les deux axes.

175. La même proposition peut se démontrer géométriquement sans le secours de l'analyse: soient deux diamètres conjugués de l'ellipse CP, CR; soient menées les deux tangentes PF, RF parallèles aux deux diamètres, chacune à chacun, on aura le rhombe

$$CPFR:$$

soit mené le diamètre CP' très-proche de CP, et son conjugué CR' qui sera aussi très-proche de CR': en menant les deux tangentes $P'F', R'F'$, on formera un seconde rhombe

$$CP'F'R',$$

qui sera égal en surface au premier; car en continuant $R'F'$ jusqu'en T, on a 1°. le triangle

$$TRF = P'CP,$$

parce que le côté $RT = CP'$, $RF = CP$, et l'angle $TRF = PCP'$: 2°. le triangle

$$TP'F' = RCR',$$

par les mêmes raisons; donc en désignant par S le triangle $F'RS$, par T le trapèze $F'SFT$, par S' le triangle $SP'F$, par A le triangle $R'CR$, et par B le triangle PCP', on aura l'équation

$$A + S + T = B + S' + T, \text{ ou } A + S = B + S' :$$

donc la partie dont la surface du rhombe $PCRF$ diminue en devenant $P'CR'F'$, est égale à la partie qu'elle reçoit en augmentation ; donc cette surface restera toujours la même, quelle que soit la position des diamètres conjugués, et par conséquent elle sera égale au rectangle des deux axes.

Il suit encore de la même construction que les deux triangles $R'CR$, $P'CP$ sont égaux en surface ; car les deux quarts d'ellipse RCQ, $R'CQ'$ sont égaux en surface : en effet, on a par la propriété du centre,

$$CR = CN, \text{ et } CP = CQ.$$

Or tout diamètre coupe ses ordonnées en deux parties égales ; donc la somme des lignes composant l'espace RCP = la somme des lignes composant l'espace RCQ : donc RCP est le quart de la surface de l'ellipse. Par la même raison $R'CP'$ sera le quart de la surface de la même ellipse ; donc le triangle $R'CR = P'CP$.

Dans l'hyperbole on a le rectangle ou rhombe $CPND$, formé par les deux axes CP, CD = le rhombe $CP'N'D'$ formé par les deux diamètres conjugués CP', CD', et les tangentes qui leur sont parallèles ; car on prouvera ici, comme pour l'ellipse, que le triangle $CP'P = DNK$, et $DCO = KPN'$: soit donc Fig. 19-21.

$$CDO = S, CONP' = T, PCP' = A,$$
$$OD'KN = S', KP'O'N' = B :$$

on aura $A + S + T = B + S' + T$,

donc $A + S = B + S'$;

c'est-à-dire que la partie de la surface que perd le rectangle $CPND$, en prenant la position $CP'N'D'$ = la partie qu'il acquiert ; donc... etc.

176. Reprenons la valeur de

$$f^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 m^2 \pm b^2 n^2} \cdots \quad g^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 q^2 \pm a^2 p^2} \cdots$$

Si l'on substitue dans la valeur de f^2 celle de m^2 prise dans l'équation (1), en observant de faire $n^2 = 1 - m^2$, on aura

$$f^2 = \frac{a^4 p^2 + b^4 q^2}{b^2 q^2 \pm a^2 p^2} \cdots$$

donc $$f^2 \pm g^2 = \frac{a^4 p^2 + b^4 q^2 \pm a^2 b^2}{b^2 q^2 \pm a^2 p^2}.$$

Si on met $1 - q^2$ à la place de p^2, et qu'on exécute la division, on aura

$$f^2 \pm g^2 = a^2 \pm b^2 ;$$

donc dans l'ellipse la somme des quarrés des deux diamètres conjugués est une quantité constante égale à la somme des quarrés des deux axes; et dans l'hyperbole, la différence des quarrés des diamètres conjugués est une quantité constante égale à la différence des quarrés des axes.

Des tangentes des lignes du second ordre.

Fig. 22-23-24.

177. Soient les lignes du second ordre AMM', dont l'équation générale rapportée à l'axe est

$$y^2 = p x \pm \frac{p x^2}{2a},$$

p étant le paramètre de la courbe; par les points M, M', M, m, menons les sécantes $M'MT'$, MmT et la tangente MS: par les points d'intersection de la sécante avec la courbe, menons les

ordonnées pm, PM, $P'M'$: du point M abaissons la perpendiculaire MN ; cette perpendiculaire sera la différence entre les deux abscisses AP', AP, de même que $M'N$ est la différence entre les deux ordonnées $M'P'$, MP. Désignons la différence des abscisses MN par k, et la différence des ordonnées $M'N$ par i : cela posé, les deux triangles semblables $MM'N$, $T'MP$, donnent la proportion

$$M'N : MN :: MP : PT', \text{ ou } i : k :: y : PT' ;$$

donc $$PT' = \frac{ky}{i}.$$

Si l'équation de la courbe est généralement $y = F.x$, on aura

$$y + i = F(x+k) ;$$

en développant cette fonction suivant la méthode du n°. (89)

$$y+i = Fx + kF'x + \frac{k^2}{2}F''x + \frac{k^3}{2.3}F'''.x \ldots$$

donc $$\frac{i}{k} = F'x + \frac{k}{2}F''x + \frac{k^2}{2.3}F'''x + \ldots$$

Le rapport de $\frac{M'N}{MN}$, ou son égal $\frac{MP}{PT'}$, est $< \frac{MP}{PS}$;

mais si on suppose que la sécante MT', immobile au point M, tourne sur ce point et devienne MmT,

on aura $$\frac{MP}{PT} > \frac{MP}{PS},$$

et dans cette seconde position, les différences des abscisses et des ordonnées k, i sont négatives ; c'est-à-dire que l'abscisse Ap et l'ordonnée pm seront

moindres que AP et PM, tandis que AP', $P'M'$ étoient plus grandes; d'où il suit 1°. que le rapport $\frac{MP}{PT'}$ qui est $< \frac{MP}{PS}$, avant de devenir $>$ doit passer par le rapport d'égalité, en vertu de la loi de continuité; 2°. que les différences i, k, qui sont d'abord positives, avant de devenir négatives, passent nécessairement par l'état de zéro; 3°. que l'égalité des rapports doit avoir lieu en même temps que i et k sont zéro, puisque T' arrive en S en même temps que M' en M.

178. Donc pour avoir la valeur de PS ou de la sous-tangente, il faudra prendre l'expression de la sous-sécante $PT' = \frac{ky}{i}$, substituer le rapport de $\frac{k}{i}$ déjà trouvé, et égaler à zéro tous les termes multipliés par k. C'est à ce procédé que se réduisoit la méthode des tangentes de Fermat, de Barrow, avant la découverte du calcul différentiel. On aura donc $$PS = \frac{y}{F'.x}.$$

Si par le point M, on mène la normale MR, on aura le triangle rectangle RMS, qui donnera la proportion $PR : PM :: PM : PS$:

donc $$PR = \frac{\overline{PM}^2}{PS} = yF'.x;$$

c'est l'expression générale de la sous-normale.

179. Pour en faire des applications aux lignes du second ordre, nous prendrons l'équation générale rapportée à l'axe

$$y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a} \text{ (159)},$$

elle donne $Fx = \sqrt{px \pm \frac{px^2}{2a}}$,

et $F'(x) = p \pm \frac{px}{a}$ (93) $= p \pm \frac{px}{a} : 2\sqrt{px \pm \frac{px^2}{2a}} \quad \frac{}{2y}$

donc $PS = \frac{2y^2}{p \pm \frac{px}{a}} = \frac{2ax \pm x^2}{a \pm x}$.

Dans la parabole, le grand axe $2a$ est infini ; donc l'expression précédente se réduit à $2x$: c'est-à-dire que dans la parabole la sous-tangente PS est le double de l'abscisse correspondante. Fig. 22.

Dans l'ellipse on a

$$PS = \frac{2ax - x^2}{a - x} :$$ Fig. 23.

si l'origine des abscisses étoit au centre (159), on feroit $x = a - z$,

et l'on auroit

$$PS = \frac{a^2 - z^2}{z} = \frac{(a+z)(a-z)}{z};$$

c'est-à-dire que la sous-tangente PS est une quatrième proportionnelle à l'abscisse comptée du centre et aux deux segmens correspondans de l'axe.

Dans l'hyperbole, on a

$$PS = \frac{2ax + x^2}{a + x};$$ Fig. 24.

ou en comptant les abscisses du centre

$$PS=\frac{(z+a)(z-a)}{z};$$

c'est-à-dire que dans l'hyperbole, la sous-tangente est une quatrième proportionnelle à l'abscisse et aux deux parties de l'axe comprises entre les sommets des deux branches de la courbe et l'ordonnée.

Pour la sous-normale, on a généralement

$$PR=p\left(\frac{a\pm x}{2a}\right);$$

donc dans la parabole, on aura

$$PR=\frac{p}{2};$$

c'est-à-dire que la sous-normale est une quantité constante, et égale à la moitié du paramètre.

Dans l'ellipse

$$PR=p\left(\frac{a-x}{2a}\right),$$

et si l'on met z pour $a-x$, et $\frac{2b^2}{a}$ à la place de p (160), on aura

$$PR=\frac{b^2z}{a^2};$$

c'est-à-dire que dans l'ellipse la sous-normale est égale à l'abscisse comptée du centre, multipliée par le rapport du quarré du petit axe au quarré du grand axe.

Dans l'hyperbole

$$PR = p\left(\frac{a+x}{2a}\right) = \frac{b^2 z}{a^2},$$

comme pour l'ellipse.

180. La méthode des tangentes que nous venons d'expliquer peut être assise sur des principes moins métaphysiques et non moins rigoureux, comme l'a fait Lagrange dans sa Théorie des fonctions analytiques. Nous allons donner une idée de sa méthode.

Soit l'équation de la courbe proposée

$$y = F.x:$$

supposons que l'équation de la ligne droite MS tangente à la courbe en un point proposé M soit $z = au + b$, l'origine des abscisses étant la même pour l'équation de la courbe et pour celle de la tangente : si on substitue $x+k$ pour x, et $y+i$ pour y, on aura au point M', Fig. 22-23-24.

$$y + i = F(x+k),$$

et en développant

$$y+i = F.x + kF'.x + \frac{k^2}{2}F''x + \frac{k^3}{2.3}F'''.x + \ldots \text{etc.} \quad (1)$$

Supposons aussi que z augmente de l, lorsque u augmente de k, l'équation de la tangente deviendra

$$z + l = a(u+k) + b. \quad (2)$$

Puisque la tangente et la courbe doivent avoir le point M de commun, il s'ensuit qu'à ce point on a $z = y$, et $u = x$,

et par conséquent

$$Fx = ax + b.$$

Si on retranche l'équation (2) de l'équation (1), on

aura au point M', $i-l$, c'est-à-dire

$$M'N' = k(F'x-a)+\frac{k^2}{2}F''x+\ldots$$

Cette dernière expression sera celle de la distance du point M' de la courbe au point N' de la tangente ; cette distance sera d'autant plus petite qu'il y aura plus de termes qui disparoîtront au commencement de la série : si l'on fait $a=F'x$, la valeur de $i-l$ ne contiendra plus la première puissance de k : or je dis que cette condition suffit pour déterminer la tangente SM.

En effet, pour que la ligne SM soit tangente il ne suffit pas qu'elle ait un point commun avec la courbe, il faut encore, selon la définition des anciens (*Géom.* 87.), qu'aucune ligne droite menée par ce point ne puisse immédiatement, avant et après le contact, passer entre elle et la courbe ; c'est ce qui arrivera si $a=F'.x$: car on a pour lors

$$i-l, \text{ ou } M'N' = \frac{k^2}{2}F''.x+\frac{k^3}{2.3}F'''.x+\ldots \text{ etc.}$$

181. Supposons une autre ligne droite passant par M dont l'équation soit

$$z'=mx+n :$$

si on suppose que z' devienne $z'+l'$, lorsque x devient $x+k$, on aura, en opérant comme ci-dessus,

$$i-l'=k(F'x-m)+\frac{k^2}{2}F''.x+\frac{k^3}{2.3}F'''.x+\ldots$$

Si $m=F'.x$, le premier terme s'évanouira, mais pour lors on a $m=a$,

et à cause de $Fx = ax+b = mx+n$, il est visible que lorsque $m = a$, on a aussi

$$n = b:$$

donc les deux droites tangentes au point M se confondroient, et ne feroient plus qu'une seule et même ligne.

Tant que $F'x$ n'est pas infini, on peut donner à k, soit positivement, soit négativement, une valeur assez petite pour que le terme $k(F'x \mp m)$ soit plus grand que la somme de tous les autres termes du développement (91) : donc on aura pour les points immédiatement avant et après le contact

$$i - l' > i - l;$$

c'est-à-dire $M'N'' > M'N'$, Fig. 22

et par conséquent cette seconde ligne ne passera pas entre la courbe et la tangente.

En résumant ce que nous venons de dire, on voit 1°. que si $F'x = m$, les deux lignes MN', MN'' se confondront ; 2°. si $F'x$ est $>$ ou $<$ m, la ligne MN' passera au-delà de la tangente, dans le premier cas, ou en deçà de la courbe dans le second ; donc dans aucun cas on ne pourra faire passer une ligne droite entre la courbe et la ligne qui jouit de la propriété ci-dessus : savoir,

$$F'x = a:$$

par conséquent cette condition, jointe à l'équation

$$z = Fx,$$

suffit pour déterminer la tangente à un point quelconque de la courbe.

Ces deux équations

$$a = F'.x \ldots z, \text{ ou } ax+b = Fx$$

donnent $b = Fx - xF'x$:

les deux constantes a et b sont donc déterminées en fonctions de x ; leur valeur substituée dans l'équation

$$z = au + b$$

donnera l'équation de toutes les lignes droites tangentes à un point quelconque de la courbe

$$z = uF'.x + Fx - xF'x.$$

Dans l'équation à la ligne droite $z = au + b$, on a

$$SA = -\frac{b}{a}(140) = \frac{F.x}{F'.x} - x = \frac{y}{F'.x} - x,$$

donc $SA + AP$,

ou la sous-tangente

$$SP = \frac{y}{F'.x}. (178)$$

Fig. 22. Si on fait $u = 0$ dans l'équation à la ligne droite, on a $AB = b$,

donc $\frac{AB}{AS}$, ou tang de l'angle $MSP = a$....

Fig. 23. Lorsque la tangente MS sera parallèle à l'axe AB, on aura $a = 0$, ou $F'.x = 0$.

182. Dans la parabole on a

$$y = F.x = \sqrt{px}, F'x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}(92):$$

cette expression ne peut être zéro que lorsque x est infinie, donc la tangente de la parabole ne peut devenir parallèle à l'axe qu'à une distance infinie du sommet de la courbe ; c'est-à-dire qu'à mesure que la courbe s'éloigne du sommet, elle a une direc-

tion plus approchante du parallélisme à l'axe, sans pouvoir jamais y arriver; mais on peut la supposer prolongée de manière qu'elle n'en diffère qu'aussi peu qu'on voudra.

Dans l'ellipse on a

$$Fx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\text{ et }F'x=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Cette dernière fonction sera zéro lorsque $x=0$: donc la tangente est parallèle à l'axe des abscisses lorsqu'elle est menée à l'extrémité du petit axe.

Dans l'hyperbole,

$$Fx=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\text{ et }F'x=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

cette fonction ne peut être zéro qu'en faisant $x=0$; mais pour lors l'ordonnée correspondante est imaginaire : donc dans l'hyperbole, la tangente ne peut jamais être parallèle à l'axe.

On a déjà vu (178) que l'expression de la sous-tangente mène directement à celle de la sous-normale par le moyen du triangle rectangle RMS, et l'on voit ici que les expressions obtenues par la méthode de Lagrange sont absolument les mêmes que celles que l'on a eues par les méthodes de Fermat et de Barow.

Des asymptotes.

183. Toutes les courbes assujetties dans leurs descriptions à des loix exprimées par une équation, sont rentrantes comme le cercle, l'ellipse, ou jettent des branches à l'infini, comme la parabole et l'hyperbole : ces branches infinies s'approchent sans cesse d'une ligne droite, ou courbe plus simple,

dont elles finissent par être moins éloignées que de la plus petite quantité assignable : ces lignes droites ou courbes sont dites les asymptotes de la première. Lorsque l'asymptote est une ligne droite, cette ligne se confond avec la courbe à une distance infinie ; elle est donc tangente à la courbe à une distance infinie : la nature de la courbe est quelquefois telle qu'à une abscisse infinie, répond une ordonnée infinie ; ou à une abscisse infinie, répond une ordonnée finie ; ou à une abscisse finie, répond une ordonnée infinie : notre objet n'étant que d'examiner les propriétés des lignes du second ordre, nous ne parlerons des asymptotes, que relativement à ces lignes.

184. Prenons l'équation générale des lignes du second ordre, rapportée à l'axe $y^2 = px \pm \frac{px^2}{2a}$: si l'on conçoit l'expression de y développée selon les puissances descendantes de x, on aura

$$y = \pm \sqrt{\pm \frac{px^2}{2a} + px}$$

$$= \pm x \sqrt{\frac{\pm p}{2a}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2ap} \pm \frac{a}{4x}\sqrt{2ap} \ldots$$

Il est visible que les termes qui renferment x au dénominateur seront d'autant moindres, que l'abscisse sera plus grande ; or on peut donner à x une valeur telle, que ces termes soient plus petits que toute grandeur assignable, l'équation de la courbe se réduira donc pour lors à celle-ci,

$$y^2 = \pm x \sqrt{\frac{\pm p}{2a}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2ap} :$$

cette équation est celle d'une ligne droite, lorsque a est une quantité finie, et que le terme $\frac{p x^2}{2a}$ est pris positivement : donc en pareil cas l'asymptote de la courbe est une ligne droite.

Si le terme $\frac{p x^2}{2a}$ est pris négativement, le développement en série sera imaginaire : donc l'ellipse, et par conséquent le cercle, n'ont pas d'asymptote. Si l'on prend $\frac{p x^2}{2a}$ avec le signe positif, l'équation est celle de l'hyperbole : donc à cause du double signe du radical, l'hyperbole a pour asymptotes les deux lignes droites XX', YY', qui se coupent en un point C que nous allons déterminer. Fig. 24.

L'équation de la ligne droite $X'CX$ est

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{p}{2a}} + \frac{1}{2}\sqrt{2ap};$$

l'origine des abscisses étant au sommet de la courbe A : si on fait $y = 0$, on a $x = -a$; donc les deux asymptotes se coupent à la distance a du sommet de la courbe, c'est-à-dire au centre de l'hyperbole.

Si l'on fait $x = 0$ on a

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{2ap};$$

mais $$p = \frac{2b^2}{a} \text{ (160)};$$

donc $$y, \text{ ou } AN = b:$$

ainsi la tangente de l'angle $\measuredangle CN = \frac{b}{a}$, et par conséquent

$$\text{tang } NCN' = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

Si $b = a$, l'angle $\measuredangle CN = 45°$, et $NCN' = 90°$: l'équation de l'hyperbole sera dans ce cas particulier

$$y^2 = 2ax + x^2 :$$

c'est celle que nous avons nommée hyperbole équilatère (165) : ainsi l'hyperbole équilatère, est celle dont les asymptotes font entr'elles un angle droit.

Si on suppose x et a infinis, la valeur de y dans le développement, se réduit au seul terme

$$\frac{1}{2}\sqrt{2ap} = \sqrt{\frac{ap}{2}},$$

a étant considéré comme l'abscisse de l'ordonnée asymptotique à une distance infinie : l'équation

$$y = \sqrt{\frac{ap}{2}}$$

est celle d'une parabole, ce qui prouve que même à une distance infinie, la parabole ne dégénère pas en ligne droite : revenons à l'hyperbole.

Fig. 25. 185. Si par un point quelconque B de l'hyperbole, on mène une ligne droite DF, terminée aux deux asymptotes CF, CD, les deux parties DB, FE de cette ligne comprise entre les asymptotes et la courbe, seront égales.

Par le centre C, soit mené un diamètre CA coupant l'ordonnée BE en deux parties égales; toutes les autres ordonnées parallèles à BE seront aussi

coupées en deux parties égales : mais à l'extrémité de la courbe, les points F, E, coïncident, ainsi que les points D, B, par la propriété des asymptotes, le diamètre coupera donc en deux parties égales l'ordonnée FD, prise à une distance infinie : il en sera de même de toutes les autres lignes qui lui sont parallèles, et qui sont également terminées aux asymptotes ; donc on aura

$$AD = AF,$$

mais $$AB = AE,$$

donc $$DB = FE.$$

Si par le sommet A, on mène la diagonale $AL = \sqrt{a^2 + b^2}$, on aura Fig. 24.

$$AI = CI = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}.$$

C'est ce qu'on appelle la puissance de l'hyperbole.

Si l'on prolonge l'ordonnée $M'P'$ jusqu'aux asymptotes, on aura

$$HM' \times M'K = \overline{AN}^2 :$$

car les triangles semblables CAN, $CP'H$, donnent la proportion

$$CA : AN :: CP' : P'H. \text{ ou } a : b :: x : P'H ;$$

donc $$P'H = \frac{bx}{a},$$

et $$M'H = \frac{bx}{a} - y, M'K = \frac{bx}{a} + y :$$

multipliant ces deux équations, on a

$$M'H \times M'K = \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2 = b^2,$$

en mettant à la place de y^2 sa valeur, $= \overline{AN}^2$.

186. Si par le point M', on mène $M'Z$ parallèle à l'autre asymptote YY', le rectangle de CZ par $M'Z$, est une quantité constante égale à

$$AI \times CI, \text{ ou } \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}.$$

Supposons que l'axe CP' prenne la position CX, et son conjugué CL la position CY', l'ordonnée $M'P'$ deviendra $M'Z$, et l'abscisse CP' deviendra CZ : soit

$$M'Z = y', \; CZ = x',$$

l'angle $$NCA = \varphi,$$

l'angle $$ACY' = \omega\,(146) = 180 - \varphi :$$

on aura par conséquent

$$m = +p, \; n = -q :$$

donc $$y = y' \sin\varphi + x' \sin\varphi ;$$

et $$x = y' \cos\varphi - x' \cos\varphi :$$

substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right),$$

et remarquant que $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$,

on a $$4x'y' = -\frac{b^2}{\sin^2\varphi} :$$

mais $$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} ;$$

donc

donc $$zu = -\frac{a^2 + b^2}{4};$$

le signe négatif annonce que l'ordonnée $M'Z$ est prise dans une direction opposée à $M'P'$, par rapport au point M' : cette équation est celle de l'hyperbole rapportée aux asymptotes, les abscisses étant comptées du centre.

Si l'origine des abscisses n'étoit pas au centre, mais sur un autre point quelconque, i, de l'asymptote, on feroit $Ci = g$, $Cz = Ci + iz = g + x$: l'ordonnée $M'z$ étant désignée par y, on auroit

$$xy + gy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

187. On a vu (149) que l'équation générale du second degré pouvoit se réduire à la forme $Cxy + g = 0$, et l'on voit ici qu'une pareille équation est celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes: ce qui confirme ce que nous avons déjà dit sur l'équation générale du second degré, savoir que son lieu géométrique est une des trois courbes dont nous avons parlé.

De la courbure des lignes du second ordre.

188. S'il est intéressant de suivre la courbe dans ses branches infinies, il ne l'est pas moins de la considérer à sa naissance, et de connoître la courbe la plus simple, qui dans ces différens points coïncide avec elle.

On sait (180) qu'entre une tangente et une courbe donnée, on ne peut pas faire passer une autre ligne droite : mais si sur la normale MN on prend plusieurs points tels que C, C', C'', et que d'une ouver- Fig. 26.

ture de compas $C'M$, $C'M$, on décrive plusieurs arcs de cercles, tous ces arcs passeront au point M, entre la tangente et la courbe (*Géométrie* 90), et s'éloigneront ensuite d'autant plus de la courbe, que le rayon $C'M$ sera plus grand.

Ces arcs continués intercepteront la courbe, ou la couperont en deux points R, R', qui se rapprocheront du point M, à mesure que le rayon $C'M$ deviendra plus petit. Si on conçoit que les deux points d'intersection R, R' soient tellement rapprochés qu'ils se confondent avec le point M, le cercle $r\,M\,r'$ qui passera par ces trois points réunis, sera celui qui s'écarte le moins de la courbe; il sera tel qu'on ne pourra pas faire passer un autre cercle entre la trace de la courbe et la sienne : il se trouvera tout entier dans la partie concave de la courbe, et séparera les cercles inscrits des cercles circonscrits : ou pour mieux dire, il sera le dernier des cercles décrits entre la tangente et la courbe, et le premier qu'on peut décrire au-dedans de la courbe : c'est à ce cercle qu'on compare la courbure de la courbe au point M : on le nomme *cercle osculateur*, et son rayon CM est appelé *rayon de courbure* : il est visible que pour connoître la courbure de la courbe en un point quelconque, il suffit de connoître le rayon du cercle osculateur.

Fig. 27. 189. Soit la courbe $R\,M\,R'$ rapportée aux deux axes $A\,C$, $A\,B$: supposons que $r\,m\,r'$ soit un cercle décrit d'un rayon $o\,M = R$, dont le centre o est déterminé par les coordonnées $AP = p$, $op' = q$, rapportées aux mêmes axes et à la même origine des abscisses; menant $P\,M$ parallèle à $A\,B$, on a

$$\overline{o\,M'}^2 + \overline{M\,M'}^2 = o\,M^2 :$$

si on désigne l'ordonnée $P\,M$ par u, l'abscisse $A\,P$ par x, cette équation deviendra

$$(q-u)^2+(p-z)^2=R^2:$$

d'où on déduit

$$u=q\mp\sqrt{R^2-(p-z)^2};$$

représentons cette équation par $u=f.z$; celle de la courbe étant $y=F.x$; au point M, on a

$$u=y,$$

et par conséquent $\quad F.x=f.z,$

et parce que à ce point $z=x$, on aura

$$Fx=fx.$$

Si on suppose que y devienne $y+i$, lorsque x devient $x+k$, on aura

$$P'k, \text{ ou } y+i=Fx+kF'x+\frac{k^2}{2}F''.x+\frac{k^3}{2.3}F'''.x+\ldots$$

Si on désigne par l l'accroissement de z correspondant à l'accroissement k de x, on aura pour le cercle osculateur

$$z+l=fx+kf'x+\frac{k^2}{2}f''x+\ldots$$

Retranchant cette dernière équation de la précédente, on a

$$i-l, \text{ ou } NM'=k(F'x-f'x)$$
$$+\frac{k^2}{2}(F''.x-f''x.)+\frac{k^3}{2.3}(F'''.x-f'''x)+\ldots$$

La valeur de NM' sera d'autant plus petite, qu'il y aura plus de termes qui disparoîtront au commencement de la série: ainsi en faisant $F'x=f'x$, et $F''.x=f''x$, NM' ou $i-l$ ne dépendra plus que des troisièmes puissances de k: or ces deux conditions jointes à la première $Fx=fx$, suffisent

pour déterminer les deux ordonnées p, q du centre et le rayon R du cercle osculateur, en fonctions de x, y, et par conséquent pour avoir l'expression générale du rayon du cercle, touchant la courbe en un point quelconque : car il est visible que chaque terme du développement étant plus grand que la somme de ceux qui le suivent (91), un second cercle dans lequel on n'auroit pas

$$Fx = fx, F'x = f'x, F''x = f''x$$

n'approcheroit pas de la courbe, de si près que celui qui jouit de ces propriétés : en second lieu tout autre cercle dont l'équation sera telle que ces trois conditions soient remplies, se confondra nécessairement avec celui-ci : car il ne pourroit en différer que parce qu'il auroit un rayon différent, et des coordonnées du centre différentes; mais si les équations qui les déterminent sont les mêmes, les coordonnées et le rayon doivent être les mêmes; donc les cercles coïncideroient.

190. Les trois indéterminées p, q, R qui entrent dans l'équation générale du cercle étant déterminées par les trois équations

$$F.x = f.x \ldots F'.x = f'.x \ldots F''x. = f''.x;$$

on en peut conclure qu'aucun autre cercle ne pourra passer entre la courbe proposée, et celui dont le rayon sera déterminé par les conditions que nous venons d'énoncer, et que par conséquent ce sera celui dont la courbure approchera le plus de la courbe proposée.

Pour déterminer R, reprenons l'équation du cercle, en mettant y pour u, et x pour z, d'après la condition $Fx = fx$, on aura

1°. $\quad R^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2 \ldots$

2°. $f.x = F.x = q \mp \sqrt{R^2 - (p-x)^2} \ldots$

3°. $f'x = F'x = \frac{p-x}{q-y} \ldots$

4°. $f''x = F''x = \frac{R^2}{(q-y)^3}$ (93) :

on déduit de la dernière $(q-y)^2 = \left(\frac{R^2}{F''.x}\right)^{\frac{2}{3}}$

la troisième donne

$$(p-x)^2 = (F'.x)^2(q-y)^2 = (F'x)^2 \times \left(\frac{R^2}{F''.x}\right)^{\frac{3}{2}} :$$

ces deux valeurs substituées dans la première, donnent

$$R = \frac{(1 + (F'x)^2)^{\frac{3}{2}}}{-F''.x} \ldots$$

Telle est l'expression du rayon de courbure pour un point quelconque de la courbe : et l'on voit qu'il ne dépend que de la valeur de la fonction prime, et de la fonction seconde dérivées de l'équation $y = Fx$, c'est-à-dire de l'équation de la courbe proposée : on peut mettre cette expression sous une forme plus simple :

On a vu (178) que l'expression de la sous-normale est, $y\,F'x$; donc celle de la normale sera

$$\sqrt{y^2 + y^2(F'x)^2}.$$

Soit la normale $= N$: on aura donc

$$N = y\sqrt{1 + (F'x)^2}$$

et $$\frac{N^3}{y^3} = (1 + (F'x)^2)^{\frac{3}{2}} :$$

cette valeur substituée dans l'expression du rayon de courbure, donne

$$R = \frac{N^3}{y^3 F'.x}.$$

Prenons l'équation générale des lignes du second ordre rapportée à l'axe,

$$y = \sqrt{px \pm \frac{px^2}{2a}} = F.x.$$

On en déduit

$$F'.x = \frac{-p^2}{4y^3} \quad (93),$$

donc

$$R = \frac{N^3}{\frac{1}{4}p^2},$$

c'est-à-dire que dans la parabole, l'ellipse et l'hyperbole, le rayon de courbure est égal au cube de la normale divisé par le quart du quarré du paramètre.

Des lignes du second ordre considérées dans le cône.

191. Les lignes du second ordre résultent aussi des sections qu'on peut faire dans un cône par le moyen d'un plan coupant; c'est ce qui leur a fait donner le nom de sections coniques: on se convaincra facilement que les sections faites dans le cône sont les mêmes que celles dont on vient d'examiner les propriétés, en cherchant l'équation générale de la courbe terminant une section quelconque faite dans le cône.

Fig. 28. Soit un cône ABC coupé par un plan FPG

parallèle à la base : il est visible que la courbe FPG qui termine la section est une circonférence de cercle, dont FG est le diamètre ; on aura donc

$$PQ^2 = FQ \times QG :$$

si par un point quelconque a de l'apothême on fait une seconde section passant par un point quelconque P du cercle, et ayant par conséquent pour ordonnée la ligne PQ, cette section sera terminée par la courbe $aPbFa$ dont nous allons chercher l'équation.

Soit l'angle constant $BAC = \alpha$, le triangle BAC étant isocèle, l'angle B et tous ceux qui lui sont égaux $= 90 - \frac{\alpha}{2}$: l'angle Aab dépendant de la position du plan coupant sera représenté par φ, le côté $Aa = m$: on aura, par les principes de la trigonométrie,

$$ba : Aa :: \sin \alpha : \sin (180 - (\alpha + \varphi)) \ldots$$

donc $$ba = \frac{m \sin \alpha}{\sin (\alpha + \varphi)} ;$$

on a aussi

$$QG : Qa :: \sin \varphi : \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \ldots$$

donc si l'on appelle Qa, x, on aura

$$QG = \frac{x \sin \varphi}{\cos \frac{\alpha}{2}} ,$$

$$FQ : bQ :: \sin (\alpha + \varphi) : \cos \frac{\alpha}{2} :$$

mais $$bQ = ba - aQ = \frac{m \sin \alpha}{\sin (\alpha + \varphi)} - x ;$$

donc $$FQ = \frac{m \sin \alpha - x \sin (\alpha + \varphi)}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Multipliant entr'elles les deux valeurs de FQ, QG, on aura

$$\overline{PQ}^2, \text{ ou } y^2 = \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \{ m x \sin \alpha - x^2 \sin (\alpha + \varphi) \}.$$

L'angle φ dépendant de la direction du plan coupant, il peut arriver que cet angle soit tel que $\alpha + \varphi = 180°$, ou $< 180°$, ou $> 180^d$: dans le premier cas, la direction du plan coupant αR est parallèle à l'apothême AB du cône ; on a pour lors

$$\sin (\alpha + \varphi) = 0,$$

et par conséquent

$$\sin \varphi = \sin \alpha ;$$

l'équation de la courbe terminant la section, faite par un plan parallèle à l'apothême, deviendra

$$y^2 = \frac{m \sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} x ;$$

mais $$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

donc $$y^2 = 4 m \sin^2 \frac{\alpha}{2} . x.$$

Si l'on représente par p la quantité constante $4 m \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, on aura

$$y^2 = p x,$$

équation à la parabole (154) : donc lorsque la direction du plan coupant est parallèle à l'apothême

du cône, la courbe terminant la section est une parabole.

192. Si l'on a $\alpha+\varphi<180°$, sinus $(\alpha+\varphi)$ sera positif, et la courbe terminant la section sera fermée ou rentrante, telle que $aPbFa$. Soit appelé $2a$ la ligne constante ab, ou l'axe de cette courbe; on déterminera sa valeur en faisant $y=0$ (159) dans l'équation générale : on trouvera pour x deux valeurs, savoir :

$$x=0, \text{ et } x=\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)};$$

cette dernière équation sera la valeur de ab; on aura ainsi

$$\frac{m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}=2a,$$

et par conséquent

$$y^2=\frac{\sin\varphi.\sin(\alpha+\varphi)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}(2ax-x^2)\ldots.$$

Appelons b l'ordonnée qui répond à l'abscisse a, on aura

$$b^2=\frac{\sin\varphi.\sin(\alpha+\varphi)}{\cos^2.\frac{\alpha}{2}}a^2,$$

ou

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\sin\varphi.\sin(\alpha+\varphi)}{\cos^2.\frac{\alpha}{2}};$$

donc l'équation de la courbe terminant la section, lorsqu'on a, $\alpha+\varphi<180°$ est

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2);$$

Si le plan coupant étoit parallèle à la base du cône, on auroit

$$\varphi = 90 - \tfrac{1}{2}\alpha, \quad \alpha + \varphi = 90 + \tfrac{1}{2}\alpha \ldots$$
$$\sin.\alpha + \varphi = \cos\tfrac{1}{2}\alpha \ldots \sin\varphi = \cos\tfrac{1}{2}\alpha ;$$

l'équation générale deviendra donc

$$y^2 = 2ax - x^2,$$

équation au cercle.

Enfin si l'on a $\alpha + \varphi > 180°$,

sin $(\alpha+\varphi)$ sera négatif, et déterminant $2a$, et b, comme pour l'ellipse, l'équation générale deviendra

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2);$$

équation à l'hyperbole.

On voit donc que l'équation des courbes qui terminent les sections faites dans un cône par un plan coupant est la même que celle des lignes du second ordre, et que par conséquent, les sections coniques sont les mêmes que les lignes qui donnent la construction générale des équations du second degré.

De l'équation des lignes du second ordre rapportée au rayon vecteur et à l'angle qu'il fait avec l'axe.

193. L'équation des lignes du second ordre ou sections coniques, rapportée au rayon vecteur et à l'angle qu'il fait avec l'axe est du plus grand usage en astronomie : nous allons la faire connoître.

On a vu (135) que pour connoître la position d'un point sur un plan, il suffit de connoître sa po-

sition par rapport à deux lignes fixes menées dans ce plan ; mais il est visible que la position de ce point M sera également déterminée si l'on connoît la longueur de la ligne fM, partant d'un point fixe f pris sur l'axe AB, et l'angle Mfa que cette ligne fait avec AB ; parce qu'il ne peut y avoir, du même côté de AB et dans le même plan, qu'un seul point M dont la distance au point f soit fM, faisant l'angle déterminé Mfa : on peut donc, aux deux coordonnées x, y, substituer d'autres variables ; savoir le rayon vecteur fM, et l'angle qu'il fait avec l'axe AB. Fig. 15.

On a vu (155) que dans la parabole le rayon vecteur que nous désignerons par r, est égal à $\frac{1}{4}p+x$: soit l'angle AfM, que ce rayon vecteur fait avec l'axe $= \varphi$, on a

$$r = MR = \tfrac{1}{4}p+x ; \qquad \text{Fig. 15.}$$

mais $$x = \tfrac{1}{4}p - r\cos\varphi ,$$

parce que l'angle φ AfM est obtus, donc

$$r = \tfrac{1}{4}p - r\cos\varphi \ldots$$

ce qui donne

$$r = \frac{p}{2(1+\cos\varphi)} = \frac{p}{4(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2} \text{ (\textit{Trigon. note} 14.)}$$

Ainsi dans la parabole le rayon vecteur est égal au quart du paramètre divisé par le quarré du cosinus de la moitié de l'angle qu'il fait avec l'axe.

Dans l'ellipse on a

$$r = \frac{a^2+cx}{a} \text{ (160)} ; \qquad \text{Fig. 16.}$$

mais $$x = r\cos\varphi - c ;$$

donc substituant pour x cette valeur, et réduisant,

$$r = \frac{a^2-c^2}{a-c\cos\varphi} :$$

on a aussi $\frac{a^2-c^2}{a}=\frac{b^2}{a}=\frac{p}{2}$:

donc $\frac{r}{p}=\frac{a}{2a-2c\cos\varphi}$,

c étant l'excentricité de l'ellipse ou la distance du foyer au centre.

Dans l'hyperbole on a

Fig. 17. $r=\frac{cx-a^2}{a}$ (164) et $x=c+r\cos\varphi$:

donc

r, ou $FM=\frac{c^2-a^2}{a-c\cos\varphi}=\frac{ap}{2a-2c\cos\varphi}$;

ou $\frac{r}{p}=\frac{e}{2a-2c\cos\varphi}$,

comme dans l'ellipse.

Observations générales sur les lignes du second ordre.

194. On a vu (149) que les caractères distinctifs des différentes courbes du premier ordre, ou lignes du second ordre, résident dans la quantité $4a-b^2$, donnée par les coefficiens du second et troisième terme de l'équation générale du second degré; lorsque cette quantité est positive, la courbe est une ellipse dont le grand axe ou diamètre est

$$\frac{k}{4a-b^2},$$

k étant un numérateur constant, dépendant du sinus des angles φ et ω; ce grand axe ou diamètre s'alonge d'autant plus que b^2 s'approche d'être

égal à $4a$, et il devient infini lorsque cette égalité a lieu : on a vu que dans ce cas la courbe est une parabole ; lorsqu'on a $4a < b^2$, le grand axe ou diamètre, d'infini qu'il étoit, devient négatif, ainsi que cela doit être, puisque toute quantité doit passer par zéro ou par l'infini, pour devenir de positive, négative ; la courbe devient alors une hyperbole : ainsi l'ellipse, la parabole et l'hyperbole peuvent, sous un certain aspect, être considérées comme les modifications des mêmes courbes. La parabole, qui est une ellipse infiniment alongée, doit être considérée comme l'état de passage, la nuance intermédiaire entre l'ellipse et l'hyperbole ; et comme l'ellipse, pour se changer en hyperbole, a passé par l'infini, certaines lignes qui déterminent la nature de la courbe doivent devenir de positives, négatives ; en sorte que les deux sommets placés aux extrémités de l'axe se présentent leur convexité au lieu de leur concavité, et que les branches qui, dans l'ellipse vont se réunir aux extrémités du petit axe, s'en éloignent au contraire de plus en plus dans l'hyperbole.

On peut faire les mêmes observations sur la génération de ces courbes dans le cône ; on y verra que la nature de chaque courbe dépend de la direction du plan coupant, et que chacune peut changer d'espèce et devenir successivement toutes les autres : le cercle, par exemple, en changeant infiniment peu la direction du plan coupant, devient une ellipse ; l'ellipse devient plus alongée ou plus excentrique, à mesure que la position du plan coupant est plus inclinée, et elle dégénère en parabole lorsque le plan coupant est parallèle à l'apothême opposé du cône : la position de la parabole étant un peu changée, elle devient la première hyperbole. Toutes ces hyperboles vont en s'élevant jus-

qu'à se confondre avec la ligne droite, lorsque le plan qui les forme ne fera que toucher le cône.

De quelques autres courbes des degrés supérieurs.

195. Quoique notre objet ne soit pas de traiter, d'une manière générale, des lignes d'un ordre supérieur au second, nous ferons cependant mention de quelques-unes en particulier, qui nous serviront d'exemple pour expliquer ce qui nous reste à dire sur les affections générales des courbes.

Les anciens n'ont guère connu d'autres courbes que les sections coniques, la conchoïde, la cissoïde... etc.; on y ajoute ensuite les paraboles et les hyperboles cubiques.

196. *La conchoïde de Nicomède.* Si l'on tire deux lignes perpendiculaires entr'elles $B\,D$, $G\,H$, qu'on détermine sur la première deux points D, d, également distans du point d'intersection A; si tirant ensuite du point B autant de lignes qu'on voudra $B\,M$, on prend sur ces lignes, tant au-dessus qu'au-dessous de $G\,H$, des parties $Q\,M$, $Q\,m$ égales entr'elles, et à $D\,A$, ou $d\,A$, la ligne courbe qui passera par les points ainsi déterminés D, M, m, d... etc. est appelée *conchoïde de Nicomède*, du nom de son auteur : Fig. 29-30-31.

Le point fixe B en est *le pole*, la ligne $G\,H$ en est l'*asymptote*, la partie constante $D\,A$ en est *la règle*, et les lignes $B\,M$, ou $B\,m$ en sont *les rayons vecteurs*, ou *rayons générateurs*.

Si la partie constante $D\,A$ est moindre que la distance $B\,A$ du pole à l'asymptote, la conchoïde sera telle qu'on la voit dans la figure 29 : si $D\,A = B\,A$, la branche inférieure prend la forme indiquée

par la figure 30; si $DA > BA$, la forme sera celle de la figure 31.

Pour avoir son équation, plaçons l'origine des abscisses en A, soit PM, perpendiculaire sur

$$GH, = y, .. AP = x, . QM = Qm = DA = a, .. AB = b :$$

les deux triangles semblables BQA, MQP, donnent la proportion $AQ : AB :: PQ : PM$... mais on a

$$AQ = AP - PQ = x - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

donc $$x - \sqrt{a^2 - y^2} : b :: \sqrt{a^2 - y^2} : y$$

d'où on déduit

$$xy = (b + y)\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Pour la branche inférieure, on aura

$$AQ = AP' + QP' = x + \sqrt{a^2 - y^2},$$

et par conséquent

$$xy = (b - y)\sqrt{a^2 - y^2} :$$

on peut dans cette dernière équation, supposer

$$b = a, b > a, b < a,$$

elle restera toujours du même degré, et appartiendra aux trois formes différentes que nous avons remarquées; on réunira les deux équations en une seule, en écrivant

$$xy = (b \pm y)\sqrt{a^2 - y^2}..$$

et élevant les deux membres au quarré, pour débarrasser l'équation du radical, on verra que la conchoïde est une ligne du quatrième ordre, ou courbe du troisième, dont l'équation est

$$y^4 \pm 2by^3 + (b^2 - a^2 + x^2)y^2 \pm 2a^2by - a^2b^2 = 0,$$

Si au lieu de rapporter l'équation de la courbe aux deux axes perpendiculaires BD, GH, on la rapporte au rayon vecteur BM, et à l'angle MBD, on aura une expression beaucoup plus simple, dont on pourra déduire également les propriétés de la courbe.

Soit le rayon vecteur $BM=z$, l'angle $MBD=\varphi$, on aura

$$BQ=\frac{b}{\cos\varphi},$$

donc

$$z=a+\frac{b}{\cos\varphi};$$

pour la branche supérieure, et

$$z=\frac{b}{\cos\varphi}-a$$

pour la branche inférieure, réunissant les deux lignes, on a

$$z=\frac{b}{\cos\varphi}\pm a.$$

La description de la courbe indique assez que puisque la ligne constante DA, ou QM s'incline de plus en plus, sans se coucher jamais sur GH, le point M, ou m doit toujours approcher de la ligne GH, sans jamais l'atteindre : cet exemple est très-propre pour donner une idée exacte des asymptotes des courbes.

Les anciens faisoient usage de la conchoïde pour trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données, et l'on sait que c'est en cela que consiste le problème de la duplication du cube (*Géométrie* 352).

198. *La cissoïde de Dioclès.* Si sur l'extrémité

AB

AB du diamètre d'un cercle $ANBA$, on mène une tangente indéfinie QBq, et que du point A, on mène autant de cordes qu'on voudra, AN, AM, prolongées jusqu'à la tangente, qu'on prenne ensuite sur ces lignes les parties $N'q$, $M'q'$ égales aux cordes correspondantes AN, AM, la courbe qui passera par les points M', N', ainsi déterminés, sera la cissoïde de Dioclès. Fig. 32.

Il suit de cette description, que si on mène les droites NG, $N'P$ perpendiculaires au diamètre, on aura la proportion

$$AG : N'D :: AN : N'q ;$$

mais $AN = N'q$, par la construction, donc

$$AG = N'D = BP ;$$

et par conséquent

$$AP = BG ;$$

ce qui donne la proportion suivante

$$PN' : AP :: GN \text{ ou } PF : AG \text{ ou } BP ;$$

mais par la propriété du cercle

$$AP : PF :: PF : PB ,$$

donc on a la proportionnalité

$$\therefore PN' : AP : PF : PB.$$

Ainsi ces quatre lignes, l'ordonnée de la courbe, l'abscisse correspondante, l'ordonnée du cercle faisant partie de celle de la courbe, et le second segment du diamètre forment toujours une proportion continue.

Soit l'ordonnée $PN' = y$,

l'abscisse

$$AP = x, \; PF = \sqrt{2ax - x^2}, \; PB = 2a - x ;$$

on aura

$$\therefore y : x : \sqrt{2ax - x^2} : 2a - x ;$$

ou $$y^2(2a-x)=x^3:$$

donc la cissoïde est une ligne du troisième ordre, ou courbe du second : le radical quarré qu'on peut prendre avec le double signe $\pm$ indique que la courbe a deux branches, une à droite, l'autre à gauche du diamètre AB:

Lorsque $x=2a$, on a

$$y^2=\frac{8a^3}{0};$$

c'est-à-dire que la valeur de y est infinie, et qu'ainsi la cissoïde peut s'approcher continuellement de la tangente Bq sans jamais pouvoir l'atteindre, mais elle peut n'en différer qu'aussi peu que l'on voudra: BQ est donc l'asymptote de la cissoïde.

Cette courbe sert aussi comme la conchoïde, pour le problême de la duplication du cube.

Des paraboles et hyperboles des degrés supérieurs.

198. Parmi les lignes courbes des degrés supérieurs, il est une classe qu'on distingue par la simplicité de leur équation, telles par exemple que celles qui sont comprises sous la forme $y^{m+n}=a^m x^n$, et qu'on nomme paraboles de tous les ordres.

Si l'on a $$m=n=1,$$

l'équation $$y^2=ax$$

sera celle de la parabole ordinaire que nous avons déjà examinée. Fig. 15.

Si l'on fait $m=2$, $n=1$, on a

$$y^3=a^2x,$$

qui est l'équation de la première parabole cubique, Fig. 33.

Si l'on fait $m = 1$, $n = 2$, on a

$$y^3 = a x^2,$$

c'est l'équation de la seconde parabole cubique. Fig. 34.

En donnant successivement à m et n différentes valeurs, on aura des courbes d'un ordre plus élevé, et on jugera de la position de leurs branches par rapport aux axes, par l'exposant de y et x, suivant qu'ils seront d'un degré pair ou impair.

On peut aussi avoir des courbes dont l'équation est

$$k y^{m+n} = b x^m (a + x)^n.$$

Si $m = n = 1$,

on a $k y^2 = b x (a + x)$,

ce qui est l'équation de l'hyperbole ordinaire....

On a vu que $x y = m$ étoit l'équation de l'hyperbole ordinaire rapportée aux asymptotes : on peut aussi, par analogie, prendre l'équation $x^m y^n = a^{m+n}$ pour celle d'une infinité de courbes ayant des asymptotes, que l'on nomme aussi hyperboliques, quoiqu'elles soient d'une forme différente de celles dont l'équation est

$$k y^{m+n} = b x^m (a + x)^n :$$

la position des branches de ces courbes, par rapport à leurs asymptotes, dépend des exposans de x et y, selon qu'ils sont pairs ou impairs : on peut voir sur ces différentes courbes, les ouvrages de Cramer, d'Euler, de Newton, etc.

Des courbes de genre parabolique.

199. On a vu (149) que l'équation

$$y = A x^2 + B x + C$$

appartient à la parabole ordinaire, et comme cette

équation est comprise dans l'équation plus générale

$$y = A x^m + B x^n + C x^p + \ldots \text{&c.},$$

on nomme paraboliques les courbes que cette dernière équation représente : on peut concevoir l'équation des courbes de genre parabolique, sous une forme plus simple

$$y = a + b x + c x^2 + d x^3 + \ldots \text{&c.}$$

composée d'autant de termes qu'on voudra : ces courbes peuvent être considérées comme une ligne
Fig. 45. qui serpente autour de l'axe des abscisses, et qui tantôt coupe l'axe en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de l'équation, lorsque toutes les racines sont réelles ; tantôt ne coupe l'axe qu'en un certain nombre de points moindre que le plus haut exposant, lorsque l'équation a des racines imaginaires : l'ordonnée y, dans ces sortes de courbes, n'est jamais élevée qu'à la première puissance : la considération des courbes paraboliques est très-utile dans la résolution des équations, nous en parlerons plus particulièrement, lorsque nous aurons fait connoître les courbes mécaniques ou transcendantes, dont on fait le plus d'usage en mathématiques.

Courbes transcendantes.

200. On nomme courbes transcendantes, celles qui ne peuvent être déterminées par une équation algébrique, et dont les relations entre les abscisses et les ordonnées dépendent des logarithmes, des arcs de cercle, des sinus, cosinus ; telles sont la logarithmique, la quadratrice, la cycloïde, les spirales, &c.

201. *La logarithmique.* Si on divise une ligne

droite AC en un certain nombre de parties égales AE, EH, et que par les points de division $A, E, H, \ldots P$, on élève des perpendiculaires AB, EF, HK, PM, continuellement proportionnelles entr'elles, les extrémités de ces lignes B, F, K, M formeront une ligne courbe appelée logarithmique, dont la propriété principale est d'avoir des ordonnées en progression géométrique, répondant à des abscisses en progression arithmétique : celles-ci seront donc le logarithme des premières. Fig. 35.

Soit $AP = x, PM = y \ldots$

le module $= m$, la base des logarithmes naturels $= e$, on aura, par la nature de la courbe,

$$x = m, \log y.$$

Multipliant le premier membre par $\log e = 1$, on aura

$$x \log e = m \log y,$$

d'où on déduit

$$y = e^{\frac{x}{m}}.$$

La propriété la plus remarquable de cette courbe est d'avoir toujours la sous-tangente égale au module : pour le démontrer, prenons l'équation générale des sous-tangentes, que nous avons vu être

$$\frac{y}{F.x} \quad (178).$$

Si on suppose que x reçoive un accroissement k, on aura

$$e^{\frac{x+k}{m}} = e^{\frac{x}{m}} \times e^{\frac{k}{m}} = e^{\frac{x}{m}}\left\{1 + \frac{k}{m} + \frac{k^2}{2}m^2 + \frac{k^3}{2.3}m^3 + \ldots\right\} \quad (107),$$

donc $$F'x = e^{\frac{x}{m}} \times \frac{1}{m},$$

et par conséquent

$$\frac{y}{F'x} = m.$$

Cette courbe représente tous les systèmes de logarithmes, en donnant à m différentes valeurs : si on prend l'ordonnée AB qui répond à l'abscisse zéro, égale à la sous-tangente qu'on prendra pour unité, les abscisses de la courbe représenteront les logarithmes naturels des ordonnées.

Si on décrit la logarithmique de manière que l'ordonnée AB, répondant à l'abscisse zéro, étant 1, la sous-tangente soit égale à

$$0,434294\ldots(103),$$

et que l'abscisse comprise entre les ordonnées 1 et 10 soit égale à 1, alors le logarithme de 10 sera 1, et la courbe représentera le système des logarithmes tabulaires.

Comme une progression géométrique s'étend à l'infini des deux côtés de son premier terme, il est évident que la logarithmique s'étend aussi à l'infini le long de son axe AC, au-dessus et au-dessous du point A : et comme les termes d'une progression géométrique décroissante ne sont jamais zéro, on voit que la courbe s'approchera continuellement de son axe, sans jamais l'atteindre, et que par conséquent l'axe AC est l'asymptote de la logarithmique.

202. *La quadratrice de Dinostrate.* Soit un quart de cercle AMB divisé en autant de parties égales qu'on voudra AL, LM, MN... aux points de division L, M, N, soient menés les rayons LC, MC, NC... qu'on divisera en autant de

Fig. 36.

parties égales que l'arc AMB contient de parties : par les points de division $a, b, c \ldots$ menez les parallèles ar, bs, et PR : les intersections mutuelles de ces parallèles avec les rayons correspondans, formeront une courbe qu'on nomme quadratrice.

On peut encore la concevoir formée par le mouvement uniforme de deux lignes. Si l'on conçoit que le rayon AC se meuve uniformément autour du centre C, jusqu'à ce qu'il arrive en CB, et que pendant ce temps, une ligne perpendiculaire en A, allant de A vers C, parcoure aussi uniformément le rayon AC, l'intersection mutuelle $r, s, t, \ldots$ du rayon CA, qui devient successivement $CL, CM, CN \ldots$ et de la perpendiculaire PR, formera la quadratrice.

De cette dernière construction, on tire la proportion

$$AMB : AC :: AS : AP.$$

Soit le rayon

$$CA = a, CR = z,$$

l'angle $ACS = \varphi$

l'arc ou l'angle

$$AMB = \frac{\pi}{4}, CP = z\cos\varphi, \text{ et } AP = a - z\cos\varphi :$$

donc la proportion donnera l'équation

$$a - z\cos\varphi = \frac{4a\varphi}{\pi}, \text{ et } z = a\left(\frac{1 - \frac{4\varphi}{\pi}}{\cos\varphi}\right).$$

Pour avoir le point H, où la quadratrice coupe le rayon CB, on fera

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

dans l'expression de z, et l'on trouvera CH, que nous appellerons b, $= \frac{0}{0}$: expression indéterminée.

Pour la déterminer, supposons pour un moment que $\varphi = \frac{\pi}{4} - \beta$; par β j'entends une quantité très-petite la plus approchante de zéro, $1 - \frac{4\varphi}{\pi}$ deviendra

$$+ \frac{4\beta}{\pi},$$

et cos φ deviendra

$$\cos(90 - \beta) = + \beta;$$

donc $$b = \frac{4a}{\pi};$$

mais on a $$\frac{\pi}{4} = \text{l'arc } \frac{AMB}{a},$$

donc $$b = \frac{a^2}{AMB} \text{ ou } AMB = \frac{a^2}{b};$$

c'est-à-dire que le quart de la circonférence AMB, est troisième proportionnelle au rayon CB, et à l'ordonnée CH de la quadratrice; et que par conséquent on trouveroit le rapport de la circonférence au diamètre, si on pouvoit déterminer rigoureusement le rapport de a : b; on auroit donc ainsi la quadrature du cercle; c'est ce qui a fait donner à cette courbe le nom de quadratrice.

Cherchons son équation, en la rapportant à des coordonnées perpendiculaires entr'elles:

Soit

$$PR = y, \; AP = x, \; CH = b,$$

on a, par la description de la courbe,

$$AS = \frac{x\,AMB}{a},$$

et par conséquent

$$\varphi = \frac{x\,AMB}{a^2};$$

mais $$AMB = \frac{a^2}{b},$$

donc l'angle $$\varphi = \frac{x}{b}:$$

or il est visible que si on prend CP pour rayon, PR sera la tangente de l'angle φ, donc l'équation de la courbe sera

$$y = (a - x)\,\text{tang}\,\frac{x}{b};$$

On voit par cette équation que la quadratrice coupe l'axe en deux points, savoir lorsque $x = 0$, et lorsque $x = 2a$... Dans cette dernière supposition, on a

$$\text{tang}\,\frac{2a}{b} = \text{tang}\,\frac{\pi}{2},$$

parce qu'on a

$$\frac{2a}{b} = \frac{2\,AMB}{a} = \frac{\pi}{2};$$

on aura donc

$$\text{tang}\,\frac{2a}{b} = 0,$$

donc $$y = 0...$$

Si l'on fait x négative, on a

$$y = -(a + x)\,\text{tang}\,\frac{x}{b};$$

la courbe a donc des ordonnées négatives au-delà de l'origine des abscisses, et si

$$x = -a, \text{ tang } \frac{a}{b} \text{ on aura tang } \frac{\pi}{4} = \infty,$$

donc la ligne QT, menée à la distance $AQ = a$, est l'asymptote de la courbe.

Si l'on fait $x > 2a$, on aura

$$y = 0,$$

et si $x = 3a$, on aura

$$y = -2a \text{ tang } \frac{3a}{b}$$

ou $$\text{tang } \frac{3a}{b} = \text{tang } \left(\frac{2a}{b} + \frac{a}{b}\right),$$

donc y sera égal à $-a$, et par conséquent la ligne DF menée à la distance $ED = a$, sera encore asymptote de la courbe.

203. *Cycloïde.* Concevons que le cercle AG roule sur la ligne AC, jusqu'à ce que tous les points
Fig. 37. de la circonférence se soient successivement appliqués sur cette droite; il est visible que le point A décrira par le mouvement du cercle une courbe, que l'on a nommée *roulette*, cycloïde, ou trochoïde: telle est la courbe que décrit dans l'espace un point de la circonférence d'une roue qui tourne sur un plan horizontal.

De cette génération il est facile de déduire 1°. que la ligne droite AC est égale à la circonférence du cercle générateur, et que par conséquent AD est la moitié du cercle générateur; que 2°. AL est égal à l'arc correspondant FL du cercle générateur; car ce cercle en roulant applique successivement tous ses points sur la ligne AC, donc la partie AL est le développement de l'arc FL: il suit de-là que

$$LD = FK = \text{l'arc } FM, \text{ ou } KB;$$

mais $$FH = FK + KH,$$

et KH est l'ordonnée correspondante du cercle générateur, ou le sinus de l'arc $FM = KB$, donc l'ordonnée FH de la cycloïde est égale à l'arc correspondant du cercle générateur, plus à l'ordonnée du même arc, ou au sinus de l'angle BRK multiplié par le rayon.

Si on appelle a le rayon du cercle générateur, y l'ordonnée FH de la cycloïde, l'arc $KB = u$, on aura

$$y = u + a \sin\left(\frac{u}{a}\right).$$

Puisque la description de la cycloïde résulte du mouvement d'un cercle sur une ligne droite, il s'en suit qu'elle n'est pas terminée au point C, où le point A du cercle touche de nouveau la ligne AC: car rien ne limitant la durée du mouvement, on peut concevoir que le cercle continue à rouler sur la droite AC au-delà du point C, et par conséquent le point A décrira par la continuité de son mouvement, un second et un troisième arc de cycloïde égal au premier, et ainsi de suite à l'infini: on doit en dire autant sur la gauche du point A, puisque le cercle a pu n'arriver à ce point qu'après un nombre indéfini de révolutions.

Si on suppose que la demi-circonférence du cercle générateur soit $a\pi$, il est évident d'après la description de la courbe, que l'ordonnée correspondante à un nombre n de révolutions du cercle, sera

$$y = 2an\pi + u + a \sin\left(2n\pi + \frac{u}{a}\right)$$

$$= 2an\pi + u + a \sin\left(\frac{u}{a}\right);$$

et si l'arc $u = 0$, on a

$$y = 2an\pi :$$

on voit par-là que la cycloïde conçue de la manière la plus générale, peut être coupée par l'axe des y dans une infinité de points, et que par conséquent son équation ne peut pas être algébrique, puisque de quelque degré qu'elle fût, elle ne pourroit marquer cette circonstance.

Si indépendamment du mouvement de rotation, le centre du cercle générateur avoit un mouvement de translation en avant ou en arrière, il en résulteroit deux cycloïdes différentes, dont l'une est dite cycloïde alongée, et l'autre cycloïde raccourcie.

On peut les concevoir décrites par le même cercle, et en même temps que la première, en prenant deux points P, Q sur le rayon RA prolongé l'un au-dedans du cercle Q, l'autre sur le prolongement P; le premier décrira la cycloïde alongée fig. 38, car il est visible que lorsque le point Q aura rejoint la ligne QQ', la base de la cycloïde décrite par le point, sera plus grande que la circonférence du cercle qui a RQ pour rayon, puisque cette base sera toujours égale à AC, ou à la circonférence du cercle qui a RA pour rayon.

Fig. 38.

Fig. 39.

Le point P décrit la cycloïde raccourcie fig. 39, puisque lorsque le point P aura rejoint la ligne PP', la base de cette cycloïde sera moindre que la circonférence qui a RP pour rayon; mais la corde KH sera toujours le sinus de l'arc correspondant; donc la partie FK de l'ordonnée sera toujours plus grande ou plus petite que l'arc BK: on aura donc

$$y = \frac{p}{q} 2an\pi + u + a \sin \frac{u}{a}$$

pour l'équation des trois cycloïdes: si $p = q$, on a

l'équation de la cycloïde ordinaire, si $p > q$, on a celle de la cycloïde alongée; et si $p < q$, on a celle de la cycloïde raccourcie.

204. *Spirales.* Les spirales en général sont des courbes qui vont toujours en s'éloignant d'un point pris pour centre, en faisant autour de ce centre plusieurs révolutions; on peut en concevoir d'une infinité d'espèces différentes : nous ne parlerons que des principales.

205. *Spirale d'Archimède.* Si l'on conçoit le rayon du cercle CA divisé en autant de parties que la circonférence, par exemple, en 400 parties; que tandis que l'extrémité du rayon se meut sur la circonférence et la parcourt toute entière, un point qui part du centre C se meut sur le rayon et le parcourt tout entier d'un mouvement uniforme; de sorte que les parties qu'il parcourt à chaque instant sur le rayon sont proportionnelles à celles que l'extrémité du rayon parcourt dans le même instant sur la circonférence; la courbe $CDNA$, décrite par le point mobile en vertu de ces deux mouvemens, a été nommée spirale d'Archimède. Fig. 40.

Lorsque le rayon CA a fait une révolution, et que le point mobile parti de C est arrivé en A, on peut concevoir que ce point continue à se mouvoir sur le prolongement du rayon, et le rayon à tourner, ce qui produira une continuation de spirale; et on voit que cette courbe peut être continuée par ce moyen aussi loin qu'on voudra.

Le centre C du cercle $ABEA$ se nomme le pôle; la ligne CN assujettie à passer par le pôle est le rayon vecteur, et tient lieu de l'ordonnée de la courbe, tandis que l'arc AM remplace l'abscisse.

Pour avoir donc l'équation de cette courbe, on supposera le rayon du cercle $CA = r$, le rayon vecteur ou l'ordonnée $CN = y$, la circonférence

$ABEA = 2r\pi$, l'arc AM ou l'abscisse $= x$; on fera ensuite la proportion

$$CN : CM :: \text{Arc. } AM : \text{cir } ABEA,$$

ou

$$y : r :: x : 2r\pi :$$

donc

$$y = \frac{x}{2\pi};$$

c'est-à-dire que dans la spirale d'Archimède les rayons vecteurs sont proportionnels aux arcs correspondans.

206. On peut rendre la génération de ces sortes de spirales plus générale, en supposant que les rayons vecteurs soient comme telle puissance entière ou fractionnaire qu'on voudra des arcs décrits; pour lors l'équation générale de ces spirales sera

$$y = \frac{r x^n}{(2r\pi)^n},$$

ou si on représente par A le coefficient constant $\frac{r}{(2r\pi)^n}$, on a

$$y = A x^n.$$

Si l'on fait $n = 1$, l'équation est celle de la spirale d'Archimède que nous venons d'examiner ; si $n = \frac{1}{2}$, on a l'équation

$$y = A x^{\frac{1}{2}}, \text{ ou } y^2 = B x :$$

cette équation est celle de la spirale qu'on nomme parabolique, parce qu'effectivement son équation a beaucoup de rapport avec celle de la parabole: si $n = -1$; on a $yx = A$,

équation à la spirale qu'on nomme hyperbolique,

à cause de l'analogie de son équation avec celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Enfin si l'on divise un quart de cercle ACB en un grand nombre de parties égales aux points $N, A, n, n' \ldots$ &c. et qu'on prenne sur les rayons $CN, Cn \ldots$ des parties CM, Cm, Cm' en progression géométrique, les points M, m, m' formeront la spirale logarithmique dans laquelle les arcs AN, $An \ldots$ seront les logarithmes des ordonnées, ou rayons vecteurs CM. Fig. 41.

Une des propriétés de la spirale logarithmique est de faire une infinité de tours autour de son centre sans jamais y arriver, ce qu'on peut démontrer de la manière suivante :

Les rayons vecteurs de cette courbe forment une progression géométrique décroissante, dont aucun terme ne sauroit être zéro, et par conséqeent la distance de la spirale au centre ne peut jamais être nulle.

L'équation de cette courbe sera la même que celle de la logarithmique

$$x = m \log y, \text{ ou } y = e^{\frac{x}{m}},$$

en observant que dans la spirale les ordonnées partent d'un même point et les abscisses sont comptées sur la circonférence d'un cercle.

207. La ressemblance des équations des spirales avec celles de certaines courbes géométriques a donné l'idée de convertir les unes dans les autres.

Par exemple, si on a une parabole dont l'équation est $y^2 = Ax$, et qu'on roule l'axe de cette parabole sur la circonférence d'un cercle ANS, les ordonnées MN, pS de la parabole perpendiculaires à l'axe iroient se réunir au centre C, et la parabole deviendroit une spirale $AMpR$: l'équation de cette spirale seroit Fig. 42.

$$y^2 = Ax,$$

en prenant MN pour ordonnée et l'arc AN pour abscisse ; mais si on veut compter les ordonnées du centre, on fera l'ordonnée

$$MC = z,$$

le rayon du cercle $CN = r$;

on aura donc $y = z - r$,

et l'équation deviendra

$$(z - r)^2 = Ax.$$

208. La spirale logarithmique peut aussi être considérée comme une logarithmique dont l'axe a été roulé le long d'un cercle, et dont les ordonnées sont disposées de manière qu'elles concourent au centre et qu'elles se trouvent prises sur les rayons prolongés.

Des affections particulières des courbes.

209. Après les considérations du nombre et de l'étendue des branches d'une courbe et de sa courbure en un point quelconque, se présentent celles de ses points singuliers... On appelle ainsi les points de la courbe qui ont quelque propriété particulière, tels que les points multiples, les points conjugués, d'inflexion, de rebroussement, de serpentement... &c.

210. On nomme point multiple celui qui est commun à plusieurs branches qui se coupent à ce point ; l'ordonnée qui répond à un point multiple a plusieurs valeurs égales : si le point est double, l'ordonnée qui y répond a deux valeurs égales ; ainsi dans la conchoïde raccourcie, en faisant $x = 0$, on trouve

Fig. 31. $y = a \ldots y = -a \ldots y = b \ldots y = -b$:

donc

donc au point B il y a deux ordonnées égales, et par conséquent la courbe a deux branches qui se coupent à ce point.

Quoiqu'à un point double il y ait des ordonnées égales, il ne faut pas en conclure que le point soit double toutes les fois que les ordonnées sont égales; car si l'ordonnée étoit tangente à la courbe, on auroit pour le point du contact deux ordonnées égales sans que le point soit double : ainsi dans les lignes du second ordre, où l'on a l'équation

$$y = \frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4} - Q} \quad (147), \text{ si } \frac{P^2}{4} = Q,$$

l'ordonnée y a deux valeurs égales $y = \frac{P}{2} \pm 0$,

et cependant les lignes du second ordre ne peuvent pas avoir de points doubles.

A un point double il doit y avoir deux tangentes de directions différentes; donc la direction de la tangente doit être déterminée par une équation du second degré, et pour un point triple, par une équation du troisième degré.

211. Les points conjugués sont des points qui appartiennent à la courbe sans la toucher, et qui se trouvent placés dans le plan de la courbe, de manière qu'ils sont comme isolés et séparés des autres branches ou portions de courbes : tel est le pôle de la conchoïde ordinaire. En effet, si l'on fait $x = 0$, on a $(y-b)^2 = 0$; Fig. 29.

donc $y = b$,

et par conséquent le point B appartient à la courbe; et comme il en est isolé, il est appelé point conjugué de la conchoïde.

212. Les points d'inflexion d'une courbe sont ceux où la courbe, après avoir tourné sa conca-

vité vers une ligne, commence à se replier en sens contraire au premier, comme on le voit dans la première parabole cubique, qui a un point d'in-
Fig. 33. flexion à son sommet ou à l'origine des abscisses ; dans la cycloïde alongée, &c. Les courbes de genre parabolique serpentant autour d'une ligne
Fig. 45. donnée, présentent aussi des points d'inflexion.

Pour qu'il y ait un point d'inflexion dans une courbe, il faut qu'elle puisse être coupée en trois
Fig. 33. points MAM' par une ligne droite ; supposant ensuite que les deux points extrêmes MM' se rapprochant du point du milieu, viennent se confondre avec lui, la sécante $M'AM$ deviendra tangente à la partie concave et à la partie convexe de la courbe, et séparera l'une de l'autre.

213. Lorsque la courbe qui s'infléchit retourne en arrière, en tournant sa convexité vers la même partie de l'axe où elle tourne sa concavité, le point
Fig. 34- d'inflexion est nommé point de *rebroussement* : on
32 30-37. en voit un exemple dans la seconde parabole cubique au point A, dans la cissoïde au point A, dans la conchoïde au point B, dans la réunion des différentes branches de la cycloïde au point C...&c.

Ce qui distingue le point de rebroussement du point d'inflexion, c'est qu'au point d'inflexion l'ordonnée n'a qu'une seule valeur, à moins qu'elle ne soit tangente de la courbe ; au lieu qu'au point de rebroussement elle a deux ou plusieurs valeurs.

Fig. 43. 214. Il arrive quelquefois que la courbe qui a tourné sa concavité vers son axe rebrousse en arrière, en tournant de nouveau sa concavité vers le même axe ; alors la courbe forme une espèce de bec, et le point A est nommé rebroussement de la seconde espèce.

215. Lorsque la courbe s'infléchit deux fois, ou qu'elle serpente autour d'une ligne droite AB, elle est coupée en quatre points par la ligne droite; si l'on suppose que les points d'intersection, se rapprochant continuellement, se réunissent en un point M, la courbe ne présentera que deux branches, et le point de réunion M de tous les points d'intersection sera nommé point de serpentement, ou, selon quelques auteurs, point d'inflexion invisible. Fig. 44.

Enfin, les points d'osculation de deux courbes sont ceux où les deux courbes se touchent sans se couper; on a vu qu'entre une courbe et sa tangente on peut faire passer une infinité de courbes différentes, qui toutes ont une même ligne droite pour tangente: ces courbes approcheront plus ou moins de la courbe donnée, et ne coïncideront que dans le seul point où leurs ordonnées sont égales: les différens degrés de rapprochement des courbes forment différens degrés d'osculation. La méthode des tangentes n'est qu'un cas très-particulier de la théorie des osculations; celle du rayon de courbure présente ensuite l'exemple le plus simple d'une osculation du second degré.

Usage des lignes courbes pour la résolution des équations.

216. L'usage principal des courbes dans la géométrie est de donner par leurs intersections les racines des équations, en rendant sensibles plusieurs résultats importans de cette théorie; cette espèce d'application de la Géométrie à l'Algèbre a été expliquée d'une manière très-claire et très-élémentaire, par Lagrange, dans les leçons de l'Ecole

Normale. Nous allons donner l'extrait de sa méthode.

217. Soit la formule générale des équations composées

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}+\ldots+V=0\ldots(1)$$

Représentons par des lignes droites toutes les valeurs successives qu'on pourroit donner à l'inconnue x, ainsi que les valeurs correspondantes que recevra le premier membre de l'équation; pour cela, au lieu de supposer le second membre de l'équation égal à zéro, nous le supposerons égal à une quantité indéterminée y: nous porterons les valeurs de x sur une droite indéfinie AB, en partant d'un point fixe Q où x sera zéro; nous prendrons les valeurs positives de x sur la partie QB, et les valeurs négatives sur la partie opposée QA: l'équation

Fig. 45. $$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+Rx^{n-3}+\ldots+V=y$$

sera celle d'une courbe de genre parabolique $HLOK$, serpentant autour de l'axe AB. Les racines de l'équation (1) seront les valeurs des abscisses répondant aux ordonnées = zéro; c'est-à-dire $QM, QN, QR.—Qi, —QG\ldots$

La considération de cette courbe donne lieu à des remarques générales sur la nature des équations.

Comme l'équation de la courbe ne contient que des puissances entières et positives de x, il est clair qu'à chaque valeur particulière de x, répondra une valeur déterminée de y, et que cette valeur sera finie tant que x sera finie; mais comme rien ne limite les valeurs de x, elles peuvent être supposées plus grandes que toute grandeur assignable, et il leur répondra des valeurs de y infiniment

grandes, tant du côté positif que du côté négatif; d'où il suit que la courbe aura un cours continu et simple, et qu'elle pourra s'étendre à l'infini de côté et d'autre de l'origine Q.

218. On voit aussi que la courbe ne pourra passer d'un côté à l'autre de l'axe sans le couper, et qu'elle ne pourra revenir du même côté qu'après l'avoir coupé deux fois; par conséquent entre deux points de la courbe placés du même côté de l'axe, il y aura nécessairement un nombre pair d'intersections; c'est ainsi qu'entre les points L, O il y a une intersection en M; entre les points H, K il y a trois intersections en I, M, N... Par la même raison, il ne pourra y avoir d'intersection, sans qu'en deçà et en delà du point d'intersection il n'y ait deux points de la courbe placés des deux côtés, comme les points L, O par rapport à l'intersection M; mais deux intersections comme N, R pourroient se rapprocher au point de se réunir en T, alors la branche OKS prendroit la position de la ligne ponctuée QTS, et toucheroit l'axe en T.

219. La courbe pourroit même se rapprocher de la ligne AB sans la toucher ni la couper, et s'en éloigner ensuite, comme en F; alors il y auroit des intersections imaginaires.

Donc si l'on a trouvé deux valeurs de y de même signe, on sera assuré qu'entre les deux valeurs de x qui y répondront il ne pourra tomber qu'un nombre pair de racines de l'équation proposée; c'est-à-dire qu'il n'y en aura aucune ou qu'il y en aura deux, ou quatre, ou six, ou... &c. Au contraire, si l'on a trouvé deux valeurs de y de signe contraire, on sera assuré qu'entre les valeurs correspondantes de x il tombera nécessairement un nombre impair de racines de la proposée; c'est-à-dire

une, ou trois, ou cinq, ou... &c. de sorte que dans ce cas, on en conclura qu'il y a au moins une racine de la proposée entre les deux valeurs de x. Réciproquement toute valeur de x qui sera une racine réelle de l'équation, se trouvera entre deux valeurs de x qui donneront pour y des valeurs de signe contraire.

220. On voit ici d'une manière sensible la raison de ce qu'on a dit (35), que toute équation d'un degré impair dont le dernier terme est négatif, a un nombre impair de racines entre $x = 0$ et x très-grand positif, et un nombre pair de racines entre $x = 0$ et x très-grand négatif, et par conséquent elle a au moins une racine réelle positive; qu'au contraire, si le dernier terme de l'équation est positif, il y aura un nombre impair de racines entre $x = 0$ et x très-grand négatif, et un nombre pair de racines entre $x = 0$ et x très-grand positif; et par conséquent au moins une racine réelle négative.

En second lieu, que toute équation d'un degré pair, dont le dernier terme est négatif, a un nombre pair de racines entre $x = 0$ et x très-grand positif, ainsi qu'entre $x = 0$ et x très-grand négatif; et par conséquent elle a au moins une racine réelle positive et une racine réelle négative; qu'au contraire, si le dernier terme est positif, il y aura un nombre pair de racines entre $x = 0$ et x très-grand positif; et pareillement un nombre pair de racines entre $x = 0$ et x très-grand négatif; de sorte que dans ce cas l'équation peut n'avoir aucune racine réelle, ni positive, ni négative.

221. On vient de voir comment une équation quelconque peut se résoudre par le moyen de la courbe dont les abscisses représentent l'inconnue de l'équation, et dont les ordonnées sont égales à la valeur du premier membre de l'é-

quation, pour chaque valeur particulière qu'on donne à l'inconnue. Cette méthode peut s'appliquer en général à toutes les équations, quelle que soit leur forme; elle ne demande pas que l'équation soit développée et ordonnée par rapport aux différentes puissances de l'inconnue : il suffit que tous les termes soient dans un seul membre, en sorte que le second membre soit zéro. On peut laisser subsister dans l'équation à résoudre les radicaux et les expressions fractionnaires; il y a même un avantage à conserver ces expressions telles que l'analyse du problême les donne, parce qu'on peut n'avoir égard qu'aux signes des radicaux qui conviendront aux circonstances particulières de chaque problême, au lieu qu'en faisant disparoître les fractions et les radicaux pour avoir l'expression ordonnée suivant les différentes puissances de l'inconnue, on introduit souvent des racines étrangères à la question proposée.

222. La méthode de résoudre les équations par le moyen des courbes peut être généralisée et rendue indépendante de l'équation même du problême; il suffit pour pouvoir l'employer, de considérer les conditions du problême en elles-mêmes, de donner à l'inconnue différentes valeurs arbitraires, et de déterminer d'après ces conditions, soit par le calcul, soit par une construction, les erreurs qui en résultent; ces erreurs étant regardées comme les ordonnées d'une courbe, dont les abscisses sont les valeurs correspondantes de l'inconnue, il en résultera une courbe continue, qu'on appellera la courbe des erreurs, et qui, par son intersection avec l'axe, donnera également toutes les solutions du problême. Ainsi si l'on trouve deux erreurs successives, l'une positive et l'autre négative, on en conclura qu'entre les deux valeurs qui

ont donné les deux erreurs, il y en aura une pour laquelle l'erreur sera nulle, et dont on pourra approcher d'aussi près qu'on voudra par des substitutions successives, ou même par la description mécanique de la courbe.

223. Cette manière de résoudre l'équation par la courbe des erreurs n'est, à proprement parler, que la règle de fausse position prise dans le sens le plus général, et rendue applicable à toutes les questions où il y a une inconnue à déterminer. Soit par exemple, l'équation

Fig. 46. $$Ax - B = 0:$$

prenons sur la ligne AB une longueur $Ab = S$ pour représenter la première supposition ou la première valeur donnée à x, on aura

$$AS - B = e,$$

en désignant par e, l'erreur correspondante à la première supposition; on élèvera au point b une perpendiculaire $bm = e$, première erreur; prenant ensuite une seconde longueur $AC = S'$ pour représenter la seconde valeur donnée à x, on aura

$$AS' - B = -e',$$

en désignant par e' la seconde erreur, qu'on suppose négative : on élèvera au point C une seconde perpendiculaire Cm' du côté opposé pour représenter la seconde erreur, et tirant par les points m, m', une ligne droite, le point R où elle coupera la ligne AB, déterminera la valeur de x qui résout l'équation; c'est-à-dire que la valeur de x qui résout l'équation $Ax - B = 0$,

sera représentée par la ligne AR.

En effet, les deux triangles semblables Rbm, RCm' donnent la proportion

$Rm : bm :: RC : Cm$, ou $x : S : e :: S' - x : - e'$,

d'où on déduit

$$x = \frac{eS' - e'S}{e - e'}; \text{ (Algèb. 111.)}$$

ce qui fournit une démonstration géométrique de la règle de double fausse supposition. L'équation $Ax - B$ étant du premier degré, doit être construite par une ligne droite : or on sait que deux points déterminent la position d'une ligne droite ; donc il suffit de faire deux fausses suppositions pour construire en pareil cas la courbe des erreurs ; il n'en est pas de même si l'équation à résoudre est du second ou du troisième degré, ou d'un degré plus élevé. Pour construire la courbe des erreurs, il faudroit faire autant de suppositions qu'elle a de points, et l'on ne peut trouver alors les racines de l'équation que par approximation.

224. Supposons, par exemple, qu'on demande un cercle dans lequel on puisse inscrire un polygone d'un nombre de côtés donné ; ce problême mis en équation monteroit à un degré d'autant plus élevé, que le nombre des côtés du polygone seroit plus grand : pour le résoudre par la méthode dont on vient de parler, on décrira d'abord un cercle à volonté, tel que $ABCDE$; on portera dans le cercle les côtés AB, BC, CD, DE, EF du polygone que nous supposerons être un pentagone pour plus de simplicité. Si l'extrémité F du dernier côté tomboit en A, le problême seroit résolu ; mais comme il est très-difficile de rencontrer juste du premier coup, on portera sur une ligne PR le rayon PA du cercle, et on élèvera Fig. 47.

au point A la perpendiculaire AF égale à la corde de l'arc AF, dans lequel consiste l'erreur de la supposition qu'on a faite sur la longueur du rayon PA : comme cette erreur est en excès, il faudra décrire un cercle d'un rayon plus grand, et faire la même opération. Supposons donc que le cercle dont le rayon est PA' donne l'erreur $F'A'$, laquelle tombant de l'autre côté du point A devra être négative, et par conséquent placée de l'autre côté de l'axe ; de cette manière on aura plusieurs points F, F' qui seront dans une courbe dont l'intersection R avec l'axe PA' donnera le vrai rayon PR du cercle qui satisfera à la question, et l'on trouvera cette intersection en resserrant successivement les points de la courbe qui se trouveront de côté et d'autre de l'axe, comme F, F'...

225. On peut encore employer les constructions géométriques à l'élimination des inconnues (73) et à la résolution des équations finales à une inconnue.

On a vu (142) que l'intersection de deux lignes droites rapportées aux mêmes axes et à la même origine, fait connoître la valeur de l'abscisse x qui répond au point d'intersection ; et comme toute équation du premier degré à une inconnue peut être censée résulter de deux équations du premier degré à deux inconnues, par l'élimination d'une des inconnues, on trouvera la valeur de l'inconnue qui reste par l'intersection de deux lignes droites.

Fig. 6.

Une ligne droite et une ligne du second ordre peuvent se couper en deux points ; on sait aussi par la théorie de l'élimination que si on a deux équations à deux variables x, y, une du second degré et l'autre du premier, et qu'on élimine y de la première par le moyen de la seconde, l'équation finale en x montera au second degré ; donc les

deux racines de cette dernière seront données par les abscisses répondant aux deux intersections de la ligne droite et de la ligne du second ordre.

Deux lignes du second ordre, deux paraboles, par exemple, deux ellipses, une parabole et un cercle, une parabole et une ellipse... &c. peuvent se couper en quatre points; mais si on prend les équations de ces courbes, rapportées aux mêmes axes et à la même origine des abscisses, et qu'on élimine y par les méthodes connues, l'équation finale sera du quatrième degré; ainsi les abscisses correspondantes aux quatre points d'intersection, donneront les quatre racines de l'équation de cette forme

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+F=0,$$

à laquelle on peut ramener toute équation du quatrième degré.

Si dans cette équation on fait $F=0$, l'équation du quatrième degré aura une racine $=0$, et les trois autres seront données par la résolution ou la construction de l'équation

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0;$$

c'est-à-dire que les racines de l'équation du troisième degré seront données par celles d'une équation du quatrième qui a une racine $=0$, et par conséquent par l'intersection de deux lignes du second ordre passant toutes les deux par l'origine des abscisses.

226. Réciproquement, une équation du second degré étant donnée, telle que

$$x^2 \pm px+q=0,$$

on peut la regarder comme le résultat de l'élimination d'une inconnue entre deux équations, l'une appartenant à la ligne droite, et l'autre à une ligne

du second ordre. Pareillement une équation du quatrième degré à une inconnue pourra être regardée comme résultant de l'élimination d'une inconnue, au moyen de deux équations du second degré renfermant y et x, et appartenant par conséquent à deux lignes du second ordre. Trouver ces deux équations est un problême indéterminé; car il y a une infinité de systêmes d'équations différentes qui peuvent produire la proposée : on en prendra donc une arbitrairement, et on aura soin de la choisir la plus simple possible, c'est-à-dire la plus aisée à construire; et comme le cercle et la ligne droite sont des lignes qu'on construit facilement, on fera en sorte d'obtenir par l'élimination l'équation du cercle.

227. Soit l'équation générale du second degré

$$x^2 - px - q^2 = 0 \quad (1)$$

qu'il s'agit de construire; cette équation peut être construite de plusieurs manières différentes : on aura la plus simple de toutes en y employant la ligne droite et le cercle. Soit l'équation de la ligne droite $y = ax$; en l'élevant au quarré, on a

$$y^2 = a^2 x^2 \text{ ou } y^2 - a^2 x^2 = 0.$$

Cette équation étant ajoutée avec l'équation (1) multipliée par a^2, donnera

$$y^2 - a^2 px - a^2 q^2 = 0 \quad (2);$$

ajoutant cette dernière avec l'équation (1), on a

$$y^2 + x^2 - (a^2+1)px - (a^2+1)q^2 = 0 \quad (3)$$

équation au cercle (149), et il est visible que si on élimine de celle-ci y^2, par le moyen de l'équation à la ligne droite, on aura la proposée (1); donc les deux racines de la proposée seront déter-

minées par les intersections de la ligne droite et du cercle, rapportées aux mêmes axes et à la même origine.

Soient en effet les deux axes XX', YY' ; la ligne MN passant par l'origine des abscisses, A sera le lieu géométrique de l'équation Fig. 48.

$$y = ax :$$

pour construire la seconde équation, commençons par faire évanouir le terme contenant x, à la première puissance : on fera

$$x = z + \left(\frac{a^2+1}{2}\right)p \quad (15),$$

l'équation (3) deviendra

$$y^2 = (p^2+4q^2)\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 - z^2 :$$

cette dernière équation est celle d'un cercle ayant pour rayon

$$\frac{a^2+1}{2}\sqrt{p^2+4q^2},$$

l'origine des abscisses étant au centre : on voit encore que, puisque le coefficient a est arbitraire, on peut le prendre égal à l'unité ; c'est-à-dire que la position de la ligne MN est telle, que l'angle $NAX = 45°$. Dans cette supposition, le rayon du cercle sera

$$\sqrt{p^2+4q^2}, \text{ et } x = z+p.$$

Si on prend la ligne $AR = p$, et qu'on transporte l'origine des coordonnées de A en R, en faisant $ZRp = z$, il est visible que l'on aura

$$xAp = Rp + AR,$$

ou $$x = z + p :$$

si du point R comme centre, et d'un rayon égal à $\sqrt{p^2 + 4q^2}$ on décrit une circonférence de cercle qui coupe la ligne MN en deux points m, m' : les deux ordonnées mp, $m'p'$ seront communes à la ligne droite et au cercle, et les abscisses correspondantes Ap, Ap' seront les valeurs des deux racines de l'équation du second degré

$$x^2 - px - q^2 = 0.$$

228. Si l'on avoit eu à construire l'équation

$$x^2 - px + q^2 = 0,$$

on auroit eu à décrire un cercle d'un rayon

$$= \sqrt{p^2 - 4q^2} :$$

et si $p^2 < 4q^2$, le rayon sera imaginaire, c'est-à-dire que le cercle, dont les intersections avec la ligne droite donnent les racines de la proposée, n'existe pas; mais on sait qu'en pareil cas, les deux racines de l'équation du second degré sont imaginaires, donc la théorie des constructions géométriques est parfaitement d'accord avec les méthodes analytiques.

229. Si l'on prend les deux équations du second degré

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + fx + g = 0$$
$$a'y^2 + b'xy + c'x^2 + d'y + f'x + g' = 0,$$

et qu'on élimine y par les méthodes connues (74), l'équation finale en x sera du quatrième degré, et ses quatre racines seront les valeurs de x qui répondent aux valeurs de y, communes aux deux équations.

Réciproquement, étant donnée l'équation du

quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

on peut supposer qu'elle résulte, par l'élimination, de deux équations du second degré; et par conséquent les quatre racines de celles-ci seront données par les abscisses correspondantes aux quatre points d'intersection des deux lignes du second ordre.

Le choix de ces courbes étant arbitraire, il faudra prendre les plus simples et les plus faciles à décrire : on prendra donc pour une de ces courbes, la parabole exprimée par l'équation

$$ay = x^2 + bx, \text{ ou } x^2 = ay - bx :$$

en élevant au quarré, l'on aura

$$x^4 = a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \ldots$$

et $$Ax^3 = Aayx - Abx^2 :$$

ces deux valeurs substituées dans la proposée, il en résultera l'équation suivante :

$$a^2y^2 + a(A - 2b)xy + (B - Ab + b^2)x^2 + Cx + D = 0 \ldots (1)$$

Les intersections de la courbe représentée par cette équation avec la parabole dont l'équation est

$$ay = x^2 + bx,$$

indiqueront les racines de l'équation proposée.

Les quantités a, b, étant arbitraires, on peut leur donner telles valeurs qu'on jugera convenables : c'est pourquoi l'équation (1) pourra représenter telle ligne du second ordre qu'on voudra : le cercle étant très-aisé à décrire, il faudra faire en sorte que la seconde équation devienne celle du cercle, ce qui sera toujours possible par le moyen de l'addition,

de la soustraction, de la multiplication, de la division.

230. Soit l'équation du quatrième degré, privée du second terme

$$x^4 + p x^2 + q x - r^2 = 0 \ldots$$

On prendra l'équation de la parabole $x^2 = a y$; l'élevant au quarré, on a

$$x^4 = a^2 y^2 \ldots$$

cette valeur substituée dans la proposée, donne

$$a^2 y^2 + p x^2 + q x - r^2 = 0 \ (1).$$

Le paramètre de la parabole restant arbitraire, rien n'empêche de faire $a^2 = p$, et si le coefficient du terme $p x^2$ est positif, l'équation (1) sera celle du cercle : on pourra donc trouver les racines de la proposée, par l'intersection du cercle et de la parabole.

231. Soit XX' l'axe des x, YY' celui des y, perpendiculaire au premier : soit A l'origine des abscisses: l'équation de la parabole indique que cette courbe a son sommet au point A, et qu'elle sera coupée en deux parties égales par l'axe des y: si on fait son paramètre $= \sqrt{p}$, on a tout ce qu'il faut pour décrire la parabole $m A m'$. Fig. 49.

L'équation (1) pourra se mettre sous la forme suivante :

$$y^2 + \left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 = \frac{q^2}{4p^2} + \frac{r^2}{p^2},$$

et si l'on fait

$$x + \frac{q}{2p} = Z, \text{ et } \frac{q^2}{4p^2} + \frac{r^2}{p^2} = R^2,$$

elle deviendra

$$y^2 = R^2 - Z^2.$$

équation

quation du cercle, ayant R pour rayon, l'origine es coordonnées étant au centre :

Si l'on prend sur l'axe des x la partie $AP = \frac{q}{2p}$, que du point P, comme centre, on décrive une rconférence d'un rayon

$$R = \sqrt{\frac{q^2}{4p^2} + \frac{r^2}{p^2}};$$

e cercle coupera la parabole aux deux points m, n', et les abscisses correspondantes aux points d'intersection, donneront les racines réelles de l'équation proposée.

232. Dans l'exemple qu'on vient de voir, les eux courbes ne se rencontrent qu'en deux points; arce que l'équation du quatrième degré qu'il s'agissoit de construire, a deux racines imaginaires. Si les uatre racines étoient réelles, la position du centre ar rapport aux deux axes et la longueur du rayon eroient telles, que le cercle coupperoit la parabole quatre points : si les quatre racines sont imaginaires, le cercle et la parabole décrits sur les mêmes axes ne se rencontreroient pas.

233. Soit l'équation générale du troisième degré

$$x^3 \pm px \pm q = 0;$$

n la multipliant par x, on la ramène à une équation du quatrième degré, dont une des racines est éro; la construction demandera donc que les deux ourbes se coupent à l'origine des abscisses : si les rois autres racines sont réelles, il y aura trois autres ntersections; si la proposée n'a qu'une racine réelle, es deux courbes ne se couperont qu'en un autre oint différent de l'origine.

234. On peut aussi construire l'équation géné-

rale du troisième degré par le moyen de l'hyperbole et de la parabole.

Soit l'équation

$$x^3 \pm p x + q = 0,$$

on prendra l'équation à la parabole

$$x^2 = a\left(y \mp \frac{p}{a}\right):$$

Fig. 50.

en la multipliant par x, on aura

$$x^3 = a y x \mp p x.$$

Si on substitue cette valeur de x^3 dans la proposée, elle deviendra

$$a x y \pm q = 0,$$

équation à l'hyperbole rapportée aux asymptotes.

Pour construire ces deux équations, soit XX' l'axe des abscisses, YY' celui des y; le point A, l'origine des abscisses: les deux axes XX' YY', perpendiculaires entr'eux, seront les asymptotes des hyperboles équilatères RR', rr', dont l'équation est

$$y x = \pm \frac{q}{a}.$$

La ligne MN faisant un angle de 45° avec les deux axes XX', YY' sera l'axe des mêmes hyperboles, dont une a pour équation

$$y x = + \frac{q}{a},$$

et l'autre $y x = - \frac{q}{a}$:

nous supposerons q négatif dans l'équation proposée, et nous ne parlerons que de l'équation

$$xy = \frac{q}{a},$$

qui convient d'ailleurs aux deux hyperboles.

235. Pour construire la parabole il faut distinguer deux cas; celui où p est positif, et celui où il négatif.

Dans le premier cas, on prendra sur l'axe des y une ligne $AP = \frac{p}{a}$, et prenant le point P pour le sommet de la courbe, on décrira la parabole dont l'équation est

$$x^2 = a\left(y - \frac{p}{a}\right):$$

il est visible que la parabole ainsi décrite ne peut couper l'hyperbole RR' qu'en un point o, puisqu'à une distance infinie du sommet, les deux branches de la parabole se trouveront parallèles à l'axe des y; c'est-à-dire à l'asymptote de l'hyperbole RR' (182): donc passé le point o, les branches paraboliques et hyperboliques ne peuvent plus se rencontrer. Quant à l'hyperbole supérieure rr', il est évident qu'elle ne peut pas être coupée par la parabole LL', puisque celle-ci est toute au-dessous de la ligne XX', et l'hyperbole est toute au-dessus: donc il n'y aura qu'un point d'intersection; mais on sait que dans la supposition de p positif, l'équation du troisième degré a deux racines imaginaires. Donc la construction géométrique est d'accord avec les résultats de l'analyse.

Dans le second cas, on prendra sur le prolongement AY' la ligne AP', et prenant le point P' pour le sommet de la courbe, on décrira la parabole ll', dont l'équation est

$$x^2 = a\left(y + \frac{p}{a}\right).$$

Lorsque p est négatif, il peut arriver que la parabole $l P' l'$ qui coupe en un point o' l'hyperbole inférieure, coupe la supérieure en deux points ou en aucun; cela dépend des valeurs des coefficiens p, q.

Pour le prouver, soit une parabole $P'S$ ayant son sommet en P', touchant l'hyperbole supérieure en un point S; soit le paramètre de cette parabole $= r$, celui de la parabole $l P' l'$ étant a: l'équation de la parabole $P'S$ sera par conséquent

$$x^2 = r\left(y + \frac{p}{a}\right).$$

Au point de contact S, l'ordonnée SK et la sous-tangente KT sont communes à la parabole et à l'hyperbole; on aura donc les deux équations

$$r\left(y + \frac{p}{a}\right) = \frac{q^2}{a^2 y}, \quad 2\left(y + \frac{p}{a}\right) = -y.$$

On tire de la seconde

$$y = -\frac{2p}{3a};$$

cette valeur substituée dans la première, donne

$$r = \frac{q^2}{a \cdot \frac{4p}{27}},$$

où l'on voit que le paramètre r sera $>$ que le paramètre a, si l'on a

$$\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27};$$

c'est-à-dire que la parabole $l P' l$ ne coupera pas l'hyperbole supérieure : on sait aussi que dans ce

cas l'équation du troisième degré a deux racines imaginaires (49).

Le paramètre r sera $<$ que le paramètre a, si l'on a

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27},$$

et par conséquent la parabole $l P' l'$ coupera en deux points l'hyperbole supérieure ; mais aussi dans cette supposition les trois racines de l'équation du troisième degré sont réelles.

Il suit de tout ce qui précède, qu'on pourra construire l'équation générale du troisième et du quatrième degré, ou par le cercle et la parabole, ou par la parabole combinée avec l'ellipse ou l'hyperbole, ou par deux ellipses, ou par deux hyperboles, ou par l'ellipse et l'hyperbole... etc.

FIN DU TOME TROISIÈME.

TABLE.

Notions générales sur la nature des équations, page 1
De la composition des équations par des facteurs simples ou du premier degré, *ibid.*
Définition des fonctions, 5
Comment on peut reconnoître qu'une équation a une racine réelle comprise entre deux nombres donnés, 7
Si a est une racine de l'équation, elle sera divisible par $x \pm a$, 8
Le produit de toutes les racines imaginaires ne peut jamais devenir négatif, quelle valeur qu'on donne à l'inconnue, 10
Toute racine a d'une équation est diviseur du dernier terme, 11
Si tous les coefficiens sont des nombres entiers, les racines ne sauroient être fractionnaires, 12
Manière de transformer les racines d'une équation, les positives en négatives, et réciproquement, 14
Manière de faire évanouir le second terme, *ibid.*
Manière de faire évanouir les fractions, 16
Résolution des équations numériques à une inconnue par les diviseurs simples, 17
Méthode de Newton pour abréger le calcul, 19
Décomposition d'une équation en facteurs commensurables du second degré, 22
Théorême relatif à la somme des puissances des racines d'une équation d'un degré quelconque, 25
Toute fonction invariable des racines d'une équation peut être exprimée au moyen de ces sommes, 30
Formation de l'équation des différences, 35
Démonstration de la règle de Huddes, pour déterminer les racines égales, 37
Equation aux quarrés des différences, 40
Règle de Descartes sur le nombre des racines positives et négatives, 43
Moyen de déterminer si toutes les racines d'une équation sont réelles et limite du nombre des racines imaginaires, 46
Toute équation de degré impair a au moins une racine réelle de signe contraire à celle de son dernier terme, 47.

Toute équation de degré pair dont le dernier terme est négatif a au moins deux racines réelles, page 48
Détermination d'un nombre qui rende la valeur du premier terme d'une équation plus grande que la somme de tous les autres, 49
Toute équation de degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré, 51
Les racines imaginaires d'une équation quelconque sont toujours de la forme $m \pm n\sqrt{-1}$, 58
De la résolution générale des équations, 59
Résolution des équations de la forme $y^n - 1 = 0$, *ibid.*
Résolution des équations de la forme $x^{2n} - 2px^n + q^2 = 0$, 62
Résolution de l'équation du troisième degré selon la méthode de Cardan, 64
On obtient les trois racines d'une équation du troisième degré par une seule opération comme dans les équations du second degré, 66
Racines de l'équation du troisième degré dans le cas irréductible, 68
Preuve directe déduite de la considération de l'équation aux quarrés des différences que les trois racines sont réelles, *ibid.*
Reproche mal fondé fait à la méthode de ne donner les racines réelles sous la forme imaginaire que parce que l'on y fait une supposition contradictoire, 71
Résolution des équations du quatrième degré par une méthode analogue à la précédente, 76
Méthode générale, due à Lagrange, pour résoudre les équations de tous les degrés, 81
Des équations réciproques, 97
Méthodes d'approximation pour la résolution des équations numériques, 102
Méthode de Newton, *ibid.*
Méthode de Lagrange, 104
Méthodes d'élimination, 118
Méthode d'Euler, 121
Méthode de Bézout, 123
Méthode déduite de la considération des fonctions invariables, 125
Les mêmes méthodes, traitées d'une manière générale, 129
Développement en série des fonctions algébriques, 134
Démonstration du binome de Newton lorsque l'exposant est un nombre entier, 135

Lorsque l'exposant est fractionnaire, page 139
Lorsque l'exposant est négatif, 141
Développement d'une fonction quelconque, 142
On peut toujours supposer convergente la série du développement, 147
Développement d'une fonction à plusieurs variables, 155
Des logarithmes, 161
Des fonctions circulaires, 171
Développement en séries des fonctions logarithmiques et circulaires, 185
Différentes espèces de séries qui dérivent des progressions Arithmétiques et Géométriques, 188
Des nombres figurés, *ibid.*
Des nombres polygones, 193
Des séries récurrentes, 198

Application de l'Algèbre à la Géométrie.

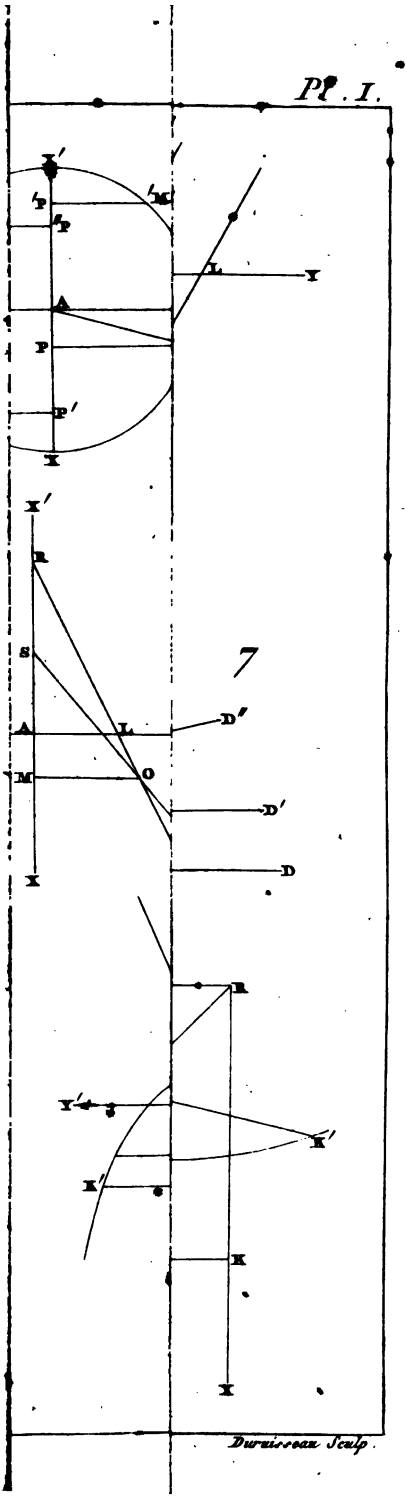
Idée générale de l'application de l'Algèbre à la Géométrie, 208
Equation générale de toutes les courbes algébriques, 211
Classification des courbes d'après le degré de leur équation. Equation de la ligne droite, *ibid.*
Equation d'une ligne droite qui passe par deux points donnés, 215
Détermination du point de rencontre de deux lignes droites qui se coupent, 216
Transformation des coordonnées d'une courbe, 217
Equation générale des lignes du second ordre, 222
Définition des centres et diamètres des courbes, 223
La valeur de l'ordonnée est composée de deux parties; construction de la première, *ibid.*
La construction précédente donne un diamètre à la courbe, 224
Equation des lignes du second ordre rapportée au diamètre, 225
Cette équation présente trois cas, *ibid.*
Les trois espèces de courbes qu'elle peut représenter sont la parabole, l'ellipse et l'hyperbole, 226
Propriétés remarquables déduites de l'équation générale, et commune à toutes les lignes du second ordre, 229
De la parabole et de ses propriétés particulières, 235
De l'ellipse et de ses propriétés particulières, 237

De l'hyperbole et de ses propriétés particulières, 242
Des centres et des diamètres des lignes du second ordre, 246
Dans la parabole tous les diamètres sont parallèles entre eux, 249
L'ellipse a une infinité de diamètres qui se coupent au centre, 250
Chaque diamètre de l'ellipse a son conjugué, 252
Il existe dans l'ellipse deux diamètres inégaux qui font le même angle avec leur conjugué, 255
Propriétés des diamètres dans l'hyperbole, analogues à celles de l'ellipse, 255
Dans l'ellipse et l'hyperbole le parallélogramme formé sur deux diamètres conjugués est égal au rectangle formé sur les axes,
Démonstration analytique et synthétique de cette proposition, 256
Dans l'ellipse la somme des quarrés des deux diamètres conjugués, et dans l'hyperbole la différence des mêmes quarrés est une quantité constante, 258
Des tangentes des lignes du second ordre, *ibid.*
Méthode de Fermat, de Barrow, 259
Méthode de Lagrange, 263
Des asymptotes, 267
Propriété de l'hyperbole rapportée aux asymptotes, 270
Equation de l'hyperbole rapportée aux asymptotes, 273
De la courbure des lignes du second ordre, *ibid.*
Des lignes du second ordre, considérées dans le cône, 278
De l'équation des lignes du second ordre, rapportée au rayon recteur et à l'angle qu'il fait avec l'axe, 282
Observations générales sur les lignes du second ordre, 284
De quelques autres courbes des degrés supérieurs, 286
De la conchoïde de Nicomède, *ibid.*
De la cissoïde de Dioclès, 289
Des paraboles et hyperboles des ordres supérieurs, 290
Des courbes de genre parabolique, 291
Des courbes transcendantes, 292
La logarithmique, *ibid.*
La quadratrice de Dinostrate, 294
La cycloïde, 298
Les spirales, 300
Des affections particulières des courbes, des points doubles, d'inflexion, de rebroussement, 304

Usage des lignes courbes pour la résolution des équations, 307
Démonstration de la règle de double fausse position, (article 223) 312
Résolution des équations des degrés supérieurs par l'intersection des courbes, 314
Résolution de l'équation du second degré par l'intersection de la ligne droite et du cercle, 316
Résolution de l'équation du quatrième degré par l'intersection de deux lignes du second ordre, 318
Résolution de l'équation générale du troisième degré par la parabole et l'hyperbole rapportée à ses asymptotes, 321

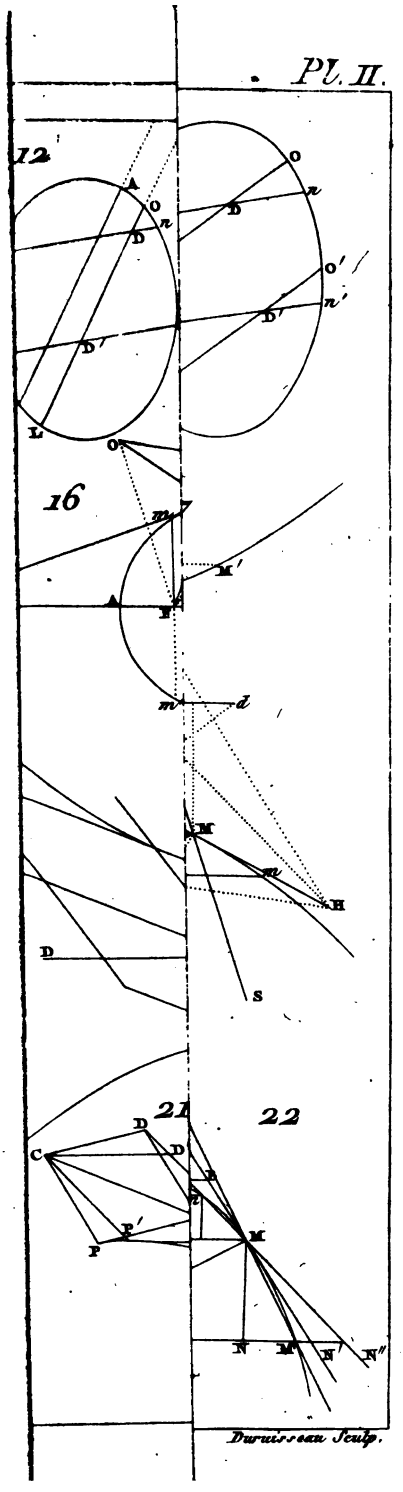
FIN DE LA TABLE.

Pl. I.



Duraisseau Sculp.

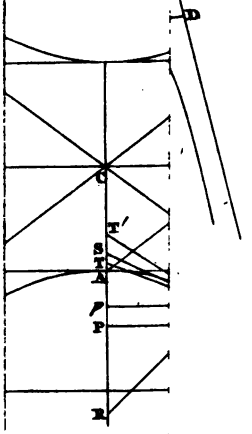
Pl. II.



Pl. III.

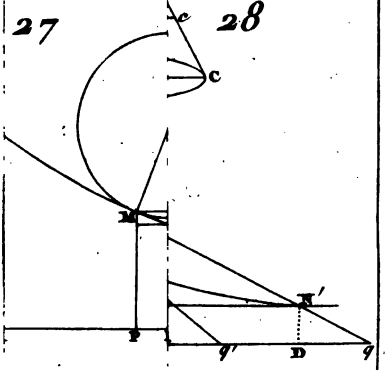
24

25

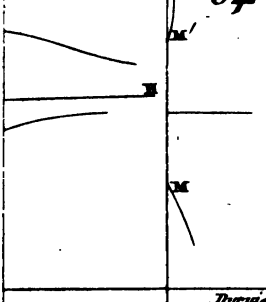
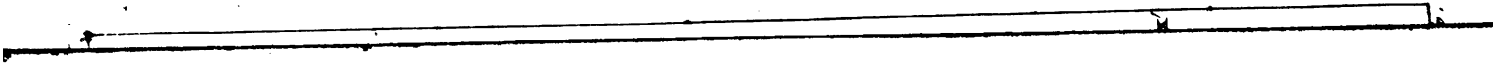


27

28



34



Duruisseau Sculp.